

PRIRUCNIK ZA VIZUALNO PROMATRANJE PROMJENLJIVIH ZVIJEZDA



Senka Pintaric

SADRŽAJ:

1. Predgovor	1
2. Metode rada	2
2.1. Odabir objekta promatranja	2
2.2. Vizualne metode promatranja	5
2.2.1. Pickeringova metoda	6
2.2.2. Argelanderova metoda	6
2.3. Određivanje julijanskog dana	9
2.4. Svodenje k centru Sunca	9
2.5. Prikaz rezultata promatranja	10
2.6. Metode obrade podataka	11
2.6.1. Određivanje trenutka ekstrema Pogsonovom metodom tetiva	11
2.6.2. Određivanje trenutka ekstrema polinomom trećeg reda	12
2.6.3. Određivanje perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima	13
2.6.4. Određivanje perioda Hertzsprungovom metodom	15
3. Pogreške vizualnih promatranja	17
3.1. Purkinjeov efekt	17
3.2. Pogreška uzrokovana ekstinkcijom	17
3.2.1. Određivanje visine zvijezde	18
3.2.2. Korekcija sjaja dobivenog Pickeringovom metodom zbog utjecaja ekstinkcije	19
3.2.3. Korekcija sjaja dobivenog Argelanderovom metodom zbog utjecaja ekstinkcije	20
4. Rezultati obrade promatranja	21
4.1. Rezultati promatranja vizualnih metoda	21
4.1.1. Rezultati promatranja Pickeringovom metodom	22
4.1.2. Rezultati promatranja Argelanderovom metodom	23
4.1.3. Prikaz promjene vrijednosti stupnja	23
4.1.4. Rezultati promatranja Pickeringovom i Argelanderovom metodom prikazani zajedno	25
4.2. Rezultati određivanja ekstrema Pogsonovom metodom tetiva	25
4.3. Rezultati određivanja ekstrema polinomom trećeg stupnja	26
4.4. Usporedba rezultata Pogsonove metode tetiva i metode određivanja ekstrema polinomom trećeg stupnja	29
4.5. Rezultati određivanja perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima	29
4.6. Sinusoide kao krivulje sjaja	33
4.7. Rezultati određivanja perioda Hertzsprungovom metodom	34
4.8. Usporedba rezultata dobivenih metodom određivanja perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima i Hertzsprungovom metodom	38
5. Zaključci	39
6. Matematički dodatak	40
6.1. Metoda najmanjih kvadrata	40
6.1.1. Metoda najmanjih kvadrata za linearnu funkciju	40
6.1.2. Metoda najmanjih kvadrata za kubnu funkciju	41
6.2. Određivanje sinusoide kao krivulje sjaja	43
7. Litaratura	47
8. Zahvala	47
9. Životopis	48

1. PREDGOVOR

Ovaj je priručnik namjenjen astronomima amaterima koji vizualnim metodama promatraju promjenljive zvijezde.

Promjenljivih zvijezda ima jako mnogo, a o njima znamo poprilično malo. Stoga promatranje ima veliku važnost jer daje mnoge informacije o nekim temeljnim svojstvima promjenljivih zvijezda.

Sve zvijezde tijekom nekog vremena više ili manje mijenjaju sjaj. Međutim u promjenljive zvijezde svrstavamo samo one kojima se sjaj primjetno mijenja ili zbog fizickih procesa prisutnih na samoj zvijezdi i u atmosferi koja je okružuje, ili zbog međusobnih pomrcina zvijezde zvijezdom kao što je to slučaj kod pomrcinski promjenljivih zvijezda.

U ovom se priručniku nalaze najbitnije upute usvezi promatranja ovih nadasve zanimljivih objekata. Najprije se upoznajemo sa metodama rada: kako promatrati i nakon toga obraditi podatke koje dobivamo promatranjem. Slijede neke pogreške koje su prisutne pri vizualnim promatranjima. Potom slijede rezultati vlastitih promatranja, gdje su na primjerima prikazane objašnjene metode obrade. Na kraju se daje matematički dodatak u kojem su obradene računске metode koje koristimo pri obradi promatranja.

Za pomoć usvezi promatranja promjenljivih zvijezda možete se obratiti na adresu senka02@gmx.de.

2. METODE RADA

2.1. ODABIR OBJEKTA PROMATRANJA

Na početku moramo odabrati zvijezdu koju ćemo promatrati. Pri odabiru vodimo računa o mogućnostima opreme koja nam je dostupna, o vlastitim željama i mogućnostima te o djelu noćnog neba koji se u predviđeno vrijeme promatranja može vidjeti.

U daljnjem tekstu koristit ćemo izraz sjaj, a pod tim smatrati zvjezdanu veličinu.

Osnovni podaci periodički promjenljive zvijezde (koja periodički mijenja sjaj) su period promjene sjaja i amplituda (razlika sjaja zvijezde pri minimalnom i pri maksimalnom sjaju). Periodički promjenljive zvijezde su npr. cefeide i pomrcinski promjenljive zvijezde.

Cefeide možemo podijeliti na nekoliko tipova a jedan od njih su klasične cefeide. Za ove zvijezde uočena je međusobna ovisnost perioda i luminoziteta. Naime, što je zvijezda sjajnije (veći luminozitet) to ima duži period promjene sjaja. Ove zvijezde mijenjaju sjaj s periodom od 1 do nekoliko desetaka dana (poznati su i neki slučajevi gdje je period dulji i od sto dana), a amplituda im je od nekoliko desetina do 2 m_v . Do promjene sjaja dolazi zbog periodičkog širenja i stezanja površinskih slojeva zvijezde.

Pomrcinski promjenljive zvijezde su dvojni ili višestruki sustavi kod kojih se ravnina staze približno poklapa s doglednicom, pa je sa Zemlje moguće primjetiti međusobne pomrcine komponentata. Kad u toku kruženja po njihovim stazama jedna zvijezda dođe ispred druge, zakrije je od našeg pogleda pa ukupan sjaj zvijezde opadne. Tada u pravilnom vremenskom slijedu nastupaju nagli padovi sjaja. U sustavima u kojima su zvijezde dosta različitog sjaja kod pomrcine sjajnije zvijezde intenzitet svjetlosti se više smanjuje (primarni minimum) nego kada je pomrcina manje sjajnije zvijezde (sekundarni minimum).

Takva velika različitost »dubine« dvaju minimuma specifična je kod pomrcinski promjenljivih zvijezda tipa beta Per. Kod njih sjaj zvijezde između pomrcina ostaje gotovo konstantan, a sekundarni minimum može biti i odsutan. Periodi pomrcinski promjenljivih zvijezda kreću se od 0,2 dana do nekoliko godina, a amplituda im može doseći i nekoliko magnituda.

Ako smo početnici odabrat ćemo promjenljivu zvijezdu kojoj je amplituda najmanje oko 0,5 m_v , jer toliku promjenu u sjaju možemo lako uočiti. Vodimo računa o mogućnostima dostupne opreme. Naime, promjenljivu zvijezdu moramo i pri maksimumu i pri minimumu sjaja kroz dostupan instrument vidjeti dovoljno jasno. Koji ćemo točno zvijezdu odabrati ovisi o vlastitim željama, ali za početnike se preporučaju periodički promjenljive zvijezde.

Da bismo odredili trenutni sjaj promjenljive zvijezde koju promatramo njen sjaj uspoređujemo sa sjajem nekoliko okolnih zvijezda. Njihov sjaj mora biti blizak trenutnom sjaju promjenljive zvijezde. Te zvijezde nazivamo poredbenim zvijezdama. Njih moramo pažljivo odabrati. Odabiremo one koje nisu promjenljive već imaju stabilan sjaj. Odabiremo ih nekoliko (obično 3-5 i od najsajnije prema najslabijoj označavamo ih *a,b,c,d...*). Razlika u sjaju između svakih dviju koje su najbliže po sjaju ne bi smjela biti veća od 0,3 m_v . U protivnom se javlja veća pogreška pri promatranjima. Obično uzimamo da nam je najsajjnija, sjajnija od promjenljive zvijezde pri maksimumu, a najslabija nešto slabijeg sjaja od promjenljive zvijezde u minimumu. Tako u svakom trenutku imamo jednu sjajniju poredbenu i jednu koja je slabijeg sjaja od promjenljive zvijezde. Pri odabiru poredbenih zvijezda moramo jako voditi računa o tome da su približno jednake boje kao i promjenljiva zvijezda, odnosno da su bliskog spektralnog razreda. Uzroke ovog uvjeta vidjet ćemo u poglavlju o pogreškama pri promatranju.

Podaci o promjenljivim zvijezdama nalaze se u mnogim izvorima kao što su npr. The AAVSO Variable Star Atlas, General Catalogue of Variable Stars (GCVS), Rocznik Astronomiczny Obserwatorium Krakowskiego. Podaci o zvijezdama koje uzimamo kao poredbene možemo pak naci u raznim katalozima. Npr. Johnsonov fotometrijski katalog ili Bright Stars katalog.

Osnovni podaci o nekim promjenljivim zvijezdama koje su pogodne za promatranje pocetnika nalaze se u tablici 1.. U tablicama 2-6 nalaze se podaci o mogucim poredbenim zvijezdama za svaku promjenljivu zvijezdu.

U tablici 1. vidimo period promjene sjaja promjenljive zvijezde u danima, maksimalan sjaj zvijezde u V podrucju (vizualno podrucje), minimalan sjaj zvijezde u V podrucju, amplituda, te trenutak ekstrema sjaja (minimum ili maksimum) promjenljive zvijezde (T_0) u julijanskim danima. Sjaj zvijezde u V podrucju opisuje intenzitet zracenja zvijezde u vidljivom dijelu spektra (na srednjoj valnoj duljini od 5500 angstrema).

Ove se zvijezde mogu promatrati golim okom ili dvogledom promjera objektiva 50 mm.

U tablici 1. periodi promjene sjaja i T_0 za deltu Cep, zetu Gem i RT Aur uzeti su iz Astronomica rocenka 1997, Slovenska ustreдна hvezdaren, Hurbanovo 1996, za W Gem iz Astronomiceskij kalendar 1981, »Nauka«, Moskva 1980. Period i T_0 za betu Lyr i betu Per uzeti su iz publikacije Rocznik Astronomiczny Obserwatorium Krakowskiego 2000, No. 71, Krakow 1999. Sjajevi u maksimumu i minimumu za sve zvijezde uzeti su iz The AAVSO Variable Star Atlas, second edition.

Tablica 1. Osnovni podaci o nekim promjenljivim zvijezdama

zvijezda	tip*	period (P) (dan)	maksimalan sjaj (V)	minimalan sjaj (V)	amplituda	T_0
RT Aur	DCEP	3,728115	5,0	5,8	0,8	2 442 361,155
Delta Cep	DCEP	5,366341	3,5	4,4	0,9	2 436 075,445
Zeta Gem	DCEP	10,15073	3,6	4,2	0,6	2 443 805,927
W Gem	DCEP	7,91413	6,5	7,4	0,9	2 444 608,990
Beta Per	EA	2,867315	2,1	3,4	1,3	2 449 317,415

* DCEP = klasicna cefeida

EA = pomrcinska promjenljiva zvijezda tipa beta Per

Tablica 2. Osnovni podaci o promjenljivoj i poredbenim zvijezdama delte Cep

zvijezda	HR	HD	rektascenzija (h m s)	deklinacija (° ` ``)	V	B-V	U-B	spekt. tip
delta Cep	8571	213307	22 29 10	58 25				F5?b
zeta Cep	8465	210745	22 10 51	58 12	3,35	1,55	1,77	K1?b
epsilon Cep	8494	211336	22 15 02	57 03	4,19	0,28	0,04	F0?V
alfa Lac	8585	213558	22 31 17	50 17	4,29	0,52	0,13	A2V
beta Lac	8538	212496	22 23 34	52 14	4,44	1,02	0,77	G9???

Tablica 3. Osnovni podaci o promjenljivoj i poredbenim zvijezdama bete Per

zvijezda	HR	HD	rektascenzija (h m s)	deklinacija (° ` ``)	V	B-V	U-B	spekt. tip
beta Per	936	19356	03 08 11	40 57				B8V
epsilon Per	1220	24760	03 57 51	40 00	2,89	-0,18	-1,00	B0,5V
delta Per	1122	22928	03 42 55	47 47	3,01	-0,12	-0,51	B5???
ni Per	1135	23230	03 45 12	42 35	3,77	0,42	0,32	F5??

Tablica 4. Osnovni podaci o promjenljivoj i poredbenim zvijezdama zete Gem

zvijezda	HR	HD	rektascenzija (h m s)	deklinacija (° ` ``)	V	B-V	U-B	spekt. tip
zeta Gem	2650	52973	07 04 6	20 34 13				F7-G3?b
delta Gem	2777	56986	07 20 7	21 58 56	3,53	0,34	0,04	F2?V
jota Gem	2821	58207	07 25 44	27 47 53	3,79	1,04	0,85	G9??bHde 1 -1
tau Gem	2697	54719	7 11 8	30 14 43	4,42	1,26	4,41	K2-???
epsilon Gem	2473	48329	6 43 56	25 7 52	2,98	1,40	1,46	G8?b

Tablica 5. Osnovni podaci o promjenljivoj i poredbenim zvijezdama RT Aur

zvijezda	HR	HD	rektascenzija (h m s)	deklinacija (° ` ``)	V	B-V	U-B	spekt. tip
RT Aur	2332	45412	6 28 34	30 29 35	5,55	0,68	0,5	F8?b
28 Gem	2480	48450	6 44 45	28 58 15	5,44	1,45	1,64	K4???
54 Aur	2438	47395	6 39 33	28 15 47	6,03	-0,08	-0,48	B7???
49 Aur	2398	46553	6 35 12	28 01 20	5,27	-0,03	-0,08	A0Vnn
kapa Aur	2219	43039	6 15 23	29 29 53	4,35	1,02	0,80	G8.5??b
SAO 78259	2272	44092	6 21 12	29 32 28	6,43	0,06	0,01	A1V s

Tablica 6. Osnovni podaci o promjenljivoj i poredbenim zvijezdama W Gem

zvijezda	HR	HD	rektascenzija (h m s)	deklinacija (° ` ``)	V	B-V	U-B	spekt. tip
W Gem								
16 Gem	2371	46031	06 31 37	15 54 12	6,40	0,00	0,00	A8V
	2391	4674	06 33 36	14 09 19	5,53	1,11	0,00	gK2

U tablicama 2-6 su uz imena zvijezda navedene HR i HD oznake, njihove ekvatorske koordinate (rektascenzija i deklinacija za epohu 2000) te njihov sjaj koji je uzet iz Johnsonovog fotometrijskog kataloga, te spektralni tip zvijezde. Svi su podaci osim sjaja i indeksa boje (B-V, U-B) uzeti iz Bright Stars kataloga.

W Gem ima premali sjaj za HR katalog. Podaci o njenim poredbenim zvijezdama prikazani u tablici 7., uzeti su iz knjige „Metode promatranja i proučavanja“*.

Tablica 7. Podaci o poredbenim zvijezdama W Gem

ime zvijezde	magnituda
(a)	5,61
16 Gem (b)	6,37
(c)	6,67
(d)	7,13
(e)	7,44

Ovdje je vrlo važno napomenuti da su zvjezdane velicine svojstvo i izvora svjetlosti i detektora. Svjetlost izvora ima intenzitet razlicito raspodjeljen po spektru. Detektori su općenito različitih sposobnosti prijema različitog djela spektra. Oko je najosjetljivije u zelenožutom spektralnog području. Tako se nizovi zvjezdanih velicina razlikuju ovisno o detektoru. Pri vizualnom je promatranju promjenljivih zvijezda izuzetno važno koristiti vizualne velicine odnosno magnituda (m_v, V). Ista zvijezda obično nema iste vizualne i npr. fotografske velicine.

2.2. VIZUALNE METODE PROMATRANJA

Prije samog promatranja oči moramo privikavati na tamu oko 15 minuta, jer tako povećavamo njihovu osjetljivost. Pri promatranju se za osvjetljavanje ne smije koristiti bijelo svjetlo, već svjetiljka prigušena crvenim filtrom.

Da bismo odredili sjaj koji u nekom trenutku ima promjenljiva zvijezda, uspoređujemo njen sjaj sa sjajem poredbenih zvijezda. Za ocjenjivanje sjaja koristi se više metoda. Ovdje su predstavljene dvije: Pickeringova i Argelanderova metoda. Te su dvije metode najpoznatije, te ujedno i najčešće korištene u promatranju promjenljivih zvijezda. Kod promatranja uz ocjenu sjaja koju donosimo jednom od metoda, bilježimo i točno vrijeme promatranja (godina, datum, sat, minuta), te neke posebne napomene kao što su prisutnost Mjeseca, pojava oblaka, magle i sl..

Za ocjenjivanje sjaja promjenljive zvijezde odabire se nekoliko poredbenih zvijezda, a za jedno se mjerenje upotrebljavaju dvije. Najbolje je odabrati one dvije koje su najbliže trenutnom sjaju promjenljive zvijezde, tako da je jedna nešto sjajnije a druga nešto slabijeg sjaja od promjenljive zvijezde.

U daljnjem tekstu pretpostavljamo da je (a) poredbena koja je nešto sjajnije od trenutnog sjaja promjenljive zvijezde (v), a (b) poredbena nešto slabijeg sjaja.

Pri ocjenjivanju sjaja, svaka se zvijezda (a, b i v) dovodi u središte vidnog polja i kratko promotri. Nakon toga se promotri slijedeća zvijezda, i za svaku se nastoji upamtiti

* Beric, Frlež, Kovacic, Rabuzin, Tadej, Vršnak, Metode promatranja i proučavanja, Narodna tehnika Hrvatske, Zagreb, 1982.

njezin sjaj. Postupak ponovimo nekoliko puta sve dok se sigurno ne opredijelimo za odgovarajuću ocjenu sjaja.

2.2.1. PICKERINGOVA METODA

Ova metoda nosi ime H. Pickeringa koji ju je 1881. godine i predložio.

Kod ove se metode razlika sjajeva između poredbenih zvijezda u mislima dijeli na 10 dijelova i zatim se ocjenjuje na kojem se od tih dijelova nalazi promjenljiva zvijezda. Odnosno za koliko je desetina sjajnije od jedne a za koliko slabija od druge poredbene zvijezde.

Ocjena je oblika $a p v q b$ gdje je $p + q = 10$. Sjaj promjenljive zvijezde jednostavno se dobiva iz jednadžbe:

$$m_v = a + p * (b - a)/10,$$

gdje su a i b vizualne magnitude poredbenih zvijezda a i b .

2.2.2. ARGELANDEROVA METODA

Argelanderova je metoda nastala sredinom 19. stoljeca, a predložio ju je F. Argelander.

Ocjena sjaja je oblika: $a p v, v q b$.

Ovdje se posebno ocjenjuje razlika u sjaju između zvijezda a i v , te b i v . Razlike u njihovom sjaju ocjenjuju se u stupnjevima. Stupanj se može definirati kao najmanja razlika u sjaju dviju zvijezda koju određeni promatrač može uočiti. Ocito je da se on mijenja od promatrača do promatrača.

Pri ocjenjivanju sjaja pretpostavimo da prvo ocjenjujemo razliku u sjaju između zvijezda a i v . Ocjena se donosi ovako:

1. Ako su a i v jednakog sjaja piše se $a 0 v$.
2. Ako izgleda da je a nešto malo sjajnije od v piše se $a 1 v$ (sjajnije je zvijezda uvijek lijevo). Zvijezda a je za 1 stupanj sjajnije od v .
3. Ako se zvijezda a uvijek i nasumnjivo čini sjajnijom od v piše se $a 2 v$.
4. Ako razlika između a i v već na prvi pogled upada u oči piše se $a 3 v$.
5. Ocjena $a 4 v$ znači još veću razliku u sjaju.

Razlika veća od 4 stupnja se ne preporuča, jer je pogreška ocjene veća.

Isto se ponovi s poredbenom zvijezdom b . Bitno je napomenuti da ocjene moraju biti međusobno nezavisne.

Kod određivanja sjaja promjenljive zvijezde, ova metoda zahtjeva više rada od Pickeringove. Sam se postupak može podijeliti na više koraka:

1. Formiranje stupanjske ljestvice

Prvo svrstamo u posebne skupine mjerenja koja vezuju iste poredbene zvijezde (a i b , b i c , c i d itd.). Npr. za mjerenja koja vezuju poredbene zvijezde a i b imamo n ocjena sjaja:

$$\begin{aligned} &a \ p_1 \ v, \ v \ q_1 \ b \\ &a \ p_2 \ v, \ v \ q_2 \ b \\ &a \ p_3 \ v, \ v \ q_3 \ b \\ &\quad \vdots \\ &\quad \vdots \\ &a \ p_{n-1} \ v, \ v \ q_{n-1} \ b \\ &a \ p_n \ v, \ v \ q_n \ b. \end{aligned}$$

Odredi se kolika je prosjecna razlika u stupnjevima između poredbenih a i b . Dakle, zbroje se svi iznosi stupnjeva između a i b te se podjele s brojem ocjena:

$$S_{ab} = (p_1 + q_1 + \dots + p_n + q_n) / n.$$

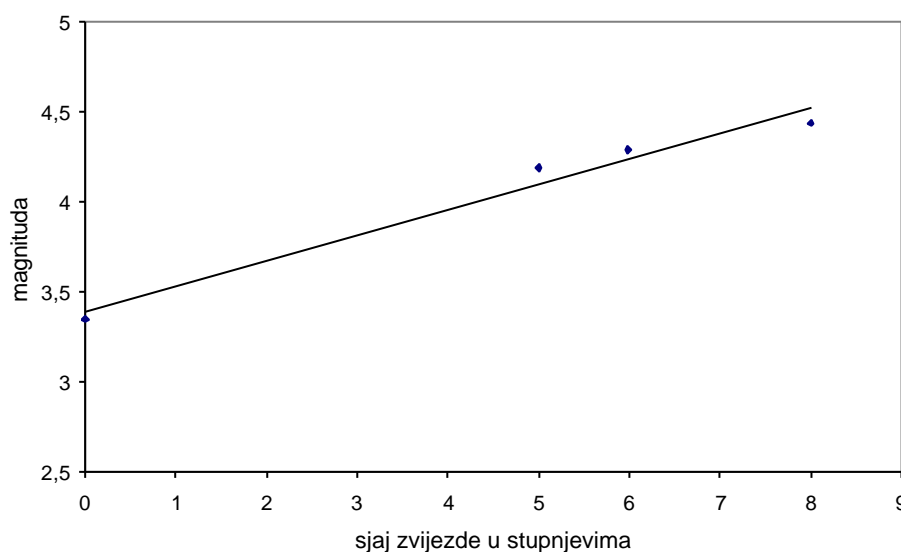
To se također napravi i za mjerenja koja vezuju poredbene zvijezde b i c , c i d Na taj način dobivamo prosjecne razlike u stupnjevima između poredbenih zvijezda.

2. Sjajevi poredbenih zvijezda u jedinicama stupnja

Kada se dobije prosjecna razlika u stupnjevima između dviju poredbenih zvijezda, pretpostavi se da zvijezda a (najsajjnija poredbena) ima sjaj 0,00 (pretpostavku uvodimo da bismo sjaj ostalih poredbenih zvijezda odredili u jedinicama stupnja). Ako je $a = 0,00$, sjaj zvijezde b je S_{ab} stupnjeva, sjaj zvijezde c je $S_{ab} + S_{bc}$ itd.

3. Korekcija

Kada su sjajevi svih poredbenih zvijezda izraženi u jedinici stupnja, vrši se korekcija. Ona se sastoji u tome da se sjajevi svih poredbenih zvijezda u stupnjevima nanese na apscisu, a magnituda na ordinatu u koordinatnom sustavu (slika 1.).



Slika 1. Korekcija sjaja poredbenih zvijezda metodom najmanjih kvadrata

U koordinatnom se sustavu nalazi onoliko tocaka koliko se poredbenih zvijezda koristi. Potrebno je odrediti pravac koji najbolje prolazi kroz te tocke. Za to se upotrebljava metoda najmanjih kvadrata.

Ako bi tocke trebale lezati na jednom pravcu, svakoj bi od njih trebala odgovarati jednadzba:

$$P_i = S_a + m_i * S \quad (1)$$

gdje je P_i magnituda poredbene zvijezde, S_a magnituda zvijezde za koju se pretpostavlja da ima sjaj 0,00, m_i sjaj zvijezde u stupnjevima, te S vrijednost jednog stupnja izražena u prividnim zvjezdanim velicinama. Sada se dobiva (za n poredbenih) $n-1$ jednadzbi oblika (1):

$$\begin{aligned} P_1 &= S_a + m_1 * S \\ P_2 &= S_a + m_2 * S \\ &\vdots \\ P_i &= S_a + m_i * S. \end{aligned} \quad (2)$$

Metodom najmanjih kvadrata dobiva se pravac $Y = ax + b$, koji najbolje odgovara mjerenjima. Ovako se dobiva magnituda zvijezde a (S_a), te vrijednost jednog stupnja (S).

Sada se iz dobivenog $Y = ax + b$ odnosno $P_i = S_a + m_i * S$ izracunaju korigirani sjajevi poredbenih zvijezda a_2, b_2, c_2, \dots

4. Dobivanje sjaja promjenljive zvijezde

Korigirani sjajevi poredbenih zvijezda uvrstavaju se u jednadzbu:

$$m_v = a_2 + p * (b_2 - a_2)/(p + q) \quad (3)$$

i dobiva se sjaj promjenljive zvijezde m_v .

Stupanj kod Argelanderove metode, mijenja se od promatrača do promatrača. Kod neiskusnih je promatrača vrijednost jednog stupnja obicno velika i kreće se oko 0,2 m_v . Kasnije, s iskustvom vrijednost stupnja se smanjuje i stabilizira te obicno dostiže vrijednost nešto manju od 0,1 m_v .

Stupanj ovisi o sposobnosti i izvježbanosti oka, promjeru objektiva teleskopa i još nekim velicinama.

Upravo zbog promjenljivosti vrijednosti jednog stupnja kod neiskusnih promatrača, ne uzimaju se odmah svi podaci u postupak određivanja sjaja promjenljive zvijezde. Poznato je da se njegova vrijednost neko vrijeme smanjuje, a zatim stabilizira. Stoga je u početku najbolje uzeti po 10 promatranja pojedine zvijezde te se s njima pristupa postupku određivanja sjaja. Potom se uzme slijedeca grupa od po 10 promatranja, itd. Tim se postupkom može vidjeti promjena vrijednosti stupnja. Kad se uoci da se vrijednost stupnja stabilizirala, daljnji se podaci obrađuju zajedno.

Spomenuta se promjena vrijednosti stupnja može prikazati na slijedeci način. Uzmemo grupu od npr. 10 promatranja i za nju se određuje vrijednost jednog stupnja. Potom se grupa pomakne za nekoliko promatranja te se ponovo uzima grupa od po 10 promatranja itd. Padaci se prikazuju u koordinatnom sustavu koji pokazuje ovisnost vrijednosti stupnja o funkciji vremena. Tako se vidi promjena vrijednosti stupnja stjecanjem promatrackog iskustva.

2.3. ODREĐIVANJE JULIJANSKOG DANA

Trenuci promatranja zapisuju se u svjetskom vremenu (Univarsal Time ili UT). Radi lakšeg uspoređivanja udaljenih vremenskih trenutaka promatrači promjenljivih zvijezda određuju trenutke promatranja po tzv. julijanskim danima. Naime, na prijedlog J. Scaligera (1582. godine) uveden je tzv. julijanski period koji se odbrojava od 12h UT, datuma 1.1. godine – 4712 (4713. prije nove ere). Bilo koji naredni trenutak može se iskazati julijanskim datumom (skraćeno JD prema engl. Julian date) i predstavlja broj srednjih suncevih dana proteklih od 12h UT 1.1. – 4712. godine. Primjetimo da je u 0h UT prošlo pola julijanskog dana, odnosno 0,5 JD.

Pretvaranje satova i minuta pokazat ćemo na slijedećem primjeru.

Npr. promatranje je izvršeno u 22h i 34m (UT). Pošto je početak julijanskog dana u podne (UT), prvo određujemo koliko je sati prošlo od podneva do trenutka promatranja. U našem je to primjeru 22h – 12h = 10h. Sada tu vrijednost sata i minute pretvaramo u djelove dana. Kako dan ima 24h odnosno 1440min, to je 10h (10h/24h =) 0,4167 dana, a 34min (34min/1440min =) 0,0236 dana, što je ukupno 0,4167 + 0,0236 = 0,4403 dana. Dobivenom rezultatu pribrojimo broj dana koje je prošao od 1.1. 4713. god. pr. n. e. i dobili smo trenutak promatranja u JD.

Tablica 8. Julijanski dan u podne prvog dana u mjesecu umanjen za 2 450 000

god.	mjesec											
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
2000.	1545	1576	1605	1636	1666	1697	1727	1758	1789	1819	1850	1880
2001.	1911	1942	1970	2001	2031	2062	2092	2123	2154	2184	2215	2245
2002.	2276	2307	2335	2366	2396	2427	2457	2488	2519	2549	2580	2610
2003.	2641	2672	2700	2731	2761	2792	2822	2853	2884	2914	2945	2975
2004.	3006	3037	3066	3097	3127	3158	3188	3219	3250	3280	3311	3341
2005.	3372	3403	3431	3462	3492	3523	3553	3584	3615	3645	3676	3706

Umjesto da za svaki dan promatranja julijanski dan citamo iz tablice, možemo uzeti neki trenutak koji nam služi kao početni. Tada za svaki trenutak promatranja određujemo koliko je udaljen od početnog te prošlo vrijeme samo dodamo na julijanski dan početnog trenutka i tako dobijemo julijanski dan trenutka promatranja.

2.4. SVOĐENJE K CENTRU SUNCA

Kod zvijezda s periodom od nekoliko dana ili manje provodi se korekcija za svodenje trenutka promatranja na centar Sunca. Kretanjem Zemlje oko Sunca mijenja se udaljenost od promjenljive zvijezde do Zemlje, pa svjetlosti treba različito vrijeme da prijede te različite puteve. Tako se promatrani minimum ili maksimum sjaja može razlikovati do ±8,3 minute. Formula za korekciju trenutka promatranja glasi:

$$\Delta t = -8^m,308 \cos\beta \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) = -0,0058 \cdot \cos\beta \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)$$

gdje je β eklipticka širina zvijezde, λ eklipticka dužina zvijezde, λ_0 eklipticka dužina Sunca u trenutku promatranja. Posljednja se velicina vadi iz efemerida, a eklipticke koordinate zvijezde dobiju se iz sljedećih formula:

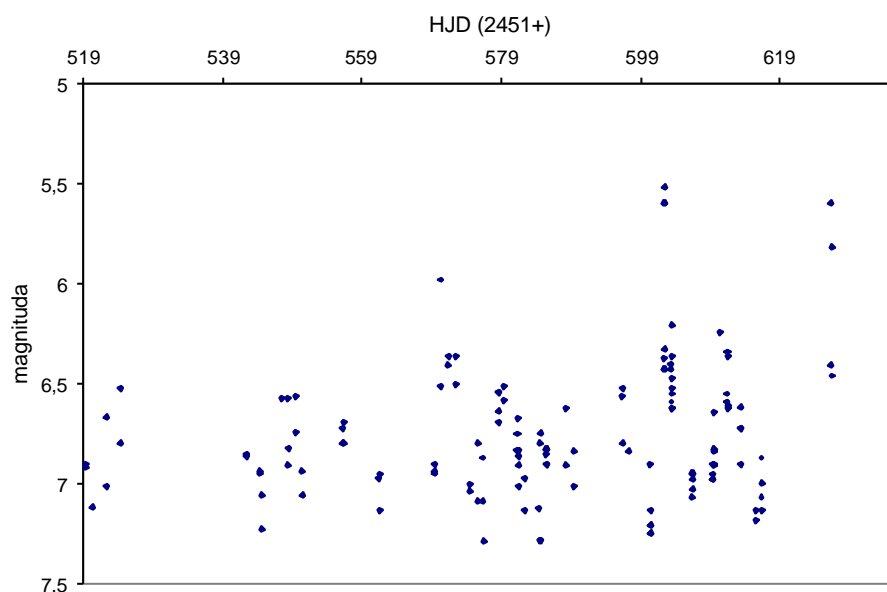
$$\begin{aligned}\sin\beta &= \cos e \sin d - \sin e \cos d \sin a \\ \cos\beta \cos\lambda &= \cos d \cos a \\ \cos\beta \sin\lambda &= \sin e \sin d + \cos e \cos d \sin a\end{aligned}$$

gdje su a i d rektascenzija i deklinacija zvijezde, e nagib ekliptike koji iznosi $23^\circ 26' 21,448''$ (za standardnu epohu J2000,0).

Ovako korigirani trenuci promatranja nazivaju se heliocentričnim julijanskim danima i označavaju se HJD.

2.5. PRIKAZ REZULTATA PROMATRANJA

Rezultati promatranja obično se prikazuju u dva koordinatna sustava. U prvom se vidi ovisnost sjaja promjenljive zvijezde i vremena (magnituda – HJD), i naziva se krivulja sjaja u ovisnosti o vremenu. Primjer takvog dijagrama nalazi se na slici 2..



Slika 2. Krivulja promjene sjaja za cefeidu W Gem. Promatranja napravljena Pickeringovom i Argelanderovom metodom prikazana su zajedno

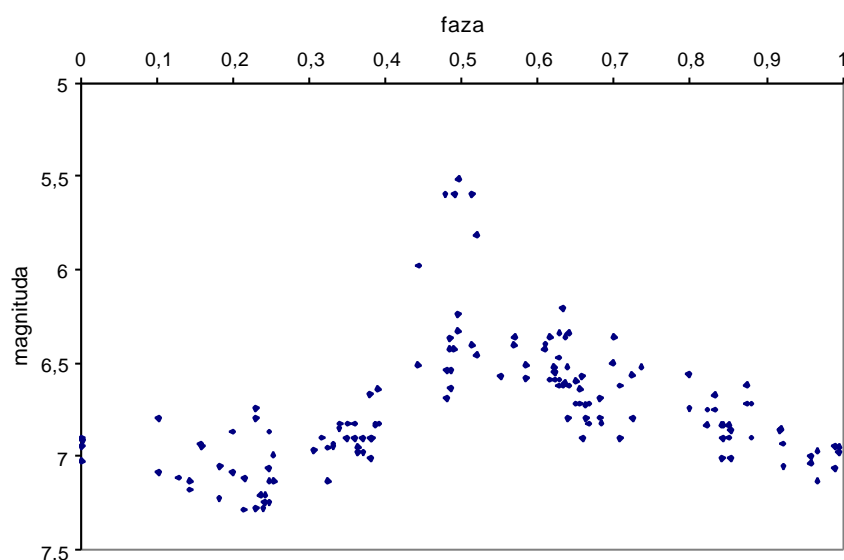
Sjajnija zvijezda ima manju magnitudu pa tako na osi ordinata manje vrijednosti nanosimo prema gore.

Drugi način prikazivanja promjene sjaja promjenljive zvijezde, pokazuje ovisnost sjaja promjenljive zvijezde o fazi i nazivamo ga fazni dijagram. Faza se definira za periodički promjenljive zvijezde. Kod njih je krivulja promjene sjaja periodička funkcija sa periodom P .

Tako svaka točka u koordinatnom sustavu magnituda-HJD ima određenu fazu. Ona se određuje:

$$f = ((t - t_0)/P) - \text{int}((t-t_0)/P) \quad (4)$$

i može biti od 0 do 1. t je vrijeme promatranja u julijanskim danima, P period promjene sjaja, a t_0 proizvoljan početni trenutak za koji uzimamo da je faza jednaka nuli ili neki posebno istaknuti trenutak (primarni minimum kod pomrcinski promjenljivih zvijezda ili maksimum sjaja kod cefeide). Funkcija $\text{int}((t - t_0)/P)$ znaci "najveće cijelo" od tog izraza, npr. $\text{int}(2.435) = 2$, $\text{int}(12121.333) = 12121$ itd. Ovim se postupkom sva promatranja svode na jedan jedini ciklus. Primjer faznog dijagrama nalazi se na slici 3.



Slika 3. Fazni dijagram za cefeidu W Gem. Motrenja Pickeringovom i Argelanderovom metodom prikazana su zajedno

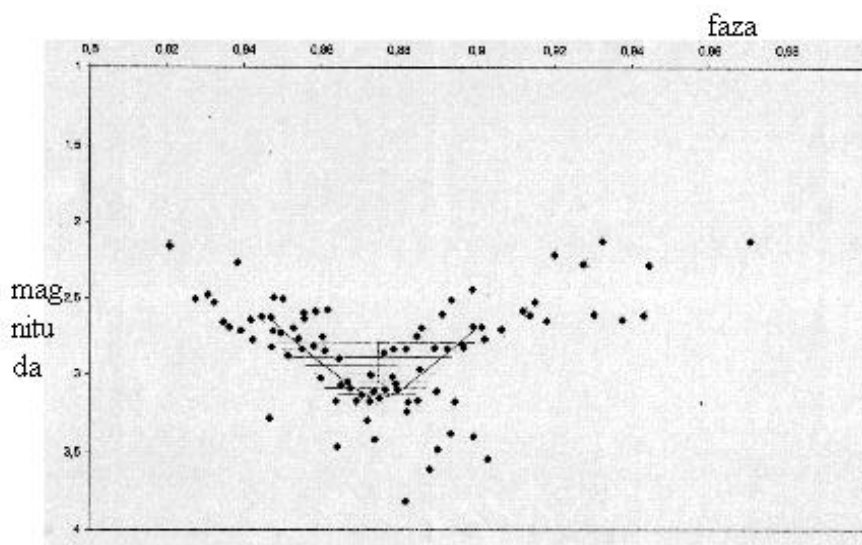
2.6. METODE OBRADE PODATAKA

Kada raspoložemo podacima promatranja, cilj je na temelju njih odrediti period promjene sjaja i trenutke u kojima nastupaju ekstremi. Ekstremi su trenuci minimuma ili maksimuma sjaja promjenljive zvijezde.

2.6.1. ODREĐIVANJE TRENUTKA EKSTREMA POGSONOVOM METODOM TETIVA

Prema podacima promatranja u faznom dijagramu, mogu se (više ili manje precizno) odrediti trenuci ekstrema. Jedna od poznatijih grafičkih metoda je Pogsonova metoda tetiva. Kroz točke u koordinatnom sustavu prvo se približno povuce srednja krivulja (slika 4.). Iz takve se krivulje mogu odrediti trenuci ekstrema. Na silaznom i uzlaznom dijelu krivulje

odabiru se točke jednakog sjaja, povezuju se u tetive (koje su paralelne sa osi x) koje se zatim raspolavljaju. Kroz ta se polovišta povlači linija koja se samo u rijetkim slučajevima pokazuje kao pravac, pa se zbog toga ekstrapolira. Tamo gdje linija siječe krivulju, nalazi se ekstrem, trenutak koji očitavamo na vremenskoj osi.



Slika 4. Pogsonova metoda tetiva za promatranja bete Per Pickeringovom metodom

Ova se metoda može koristiti i u koordinatnom sustavu magnituda-HJD ako imamo dovoljno promatranja oko ekstrema.

2.6.2. ODREĐIVANJE TRENUTKA EKSTREMA POLINOMOM TRECEG REDA

Ovdje predstavljena metoda daje približnu kubnu funkciju koja prolazi područjem oko ekstrema krivulje sjaja. Odnosno, tražena je funkcija oblika:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Kubovi se naime mogu "nositi" sa asimetrijom krivulje sjaja promjenljivih zvijezda. A budući da se odnose samo na dio krivulje oko ekstrema, može se koristiti za krivulje raznih oblika. Kubna se funkcija određuje tako da najbolje prijanja uz rezultate promatranja. Određuje se pomoću metode najmanjih kvadrata, i trenutak ekstrema je određen jednadžbom funkcije. Ako određujemo maksimum sjaja on se nalazi na maksimumu funkcije, a minimum na minimumu funkcije.

Kao prvo treba odrediti područje za koje se određuje jednadžba funkcije. U ovom nam slučaju mogu koristiti neke jednostavnije metode određivanja ekstrema kao što je Pogsonova metoda tetiva. Njome se odredi trenutak ekstrema, i zatim se uzme područje na krivulji sjaja takvo da je dobiveni ekstrem negdje na sredini.

Kad se odredi područje kroz koje se određuje kubna funkcija, pristupa se određivanju jednadžbe funkcije. Ona se dobiva metodom najmanjih kvadrata.

Kad se odredi jednadžba funkcije, određuje se njen ekstrem. U točki ekstrema koeficijent smjera tangente jednak je nuli. Kako je koeficijent smjera tangente jednak derivaciji date funkcije po x imamo:

$$d/dx (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0,$$

odnosno, ekstrem date funkcije je rješenje kvadratne jednadžbe oblika:

$$3*ax^2 + 2*bx + c = 0.$$

Rješenje kvadratne jednadžbe je trenutak ekstrema. Kako se rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivaju 2 rješenja, uzima se ono koje se nalazi u području za koje se funkcija određuje.

Koliko dobro funkcija prijanja uz podatke promatranja, pokazuje srednje kvadratno odstupanje magnitude. Određuje se odstupanje svake točke od funkcije po osi y , vrijednost se kvadrira, te podijeli s brojem tocaka:

$$R = (S(f(x_i) - x_i)^2)/n. \quad (5)$$

U (5) se sumira od 1 do n .

Dobiveni R ujedno pokazuje koliko su točke raspršene oko krivulje. Prema tome, poželjno je da R bude što manji. Ujedno se dobiveni ekstrem može smatrati točnijim ako je R manji. Manje se odstupanje postiže smanjenjem broja tocaka odnosno područja kojim se krivulja određuje, ali isto tako da bi se dobio točniji rezultat u odnosu na promatranja, potrebno je imati što više tocaka odnosno promatranja. Ovdje sad treba naci ravnotežu između ta dva zahtjeva. Treba uzeti usko područje ali s dovoljno podataka. Dakle, ova metoda zahtjeva što više promatranja oko ekstrema

2.6.3. ODREĐIVANJE PERIODA IZ TRENUTAKA EKSTREMA DOBIVENIH PROMATRANJIMA

Kada imamo niz mjerenja neke promjenljive zvijezde ona su najčešće izvršena s nejednakim razmacima i s većim ili manjim periodima kada promatranja nije bilo. Pogledom na fazni dijagram može se procijeniti oko koje se vrijednosti magnitude nalazi maksimum (ako za ekstrem uzimamo maksimum sjaja). Sada bismo trebali odrediti trenutke promatranja kada nam je sjaj promjenljive pri maksimumu.

U ovoj metodi uzimaju se pojedinačna promatranja unutar ciklusa za koja procijenimo da se nalaze pri maksimumu. Odnosno, uzima se promatranje s najvećim sjajem kao trenutak maksimuma. Ti se odabrani trenuci obično obilježavaju slovima A, B, C ...

Sada treba vidjeti koji su poredu ti ciklusi. Recimo da je ciklus koji smo označili s A n -ti ciklus. Pomocu poznatog perioda (P) promatrane promjenljive zvijezde odredi se koji su nam po redu ostali ciklusi. Može se koristiti jednadžba:

$$n = (T_i - T_j)/P,$$

gdje su T_i i T_j trenuci maksimalnog sjaja.

„Grubi period“ (P') odredi se jednostavno tako da se oduzme trenutak posljednjeg određenog maksimuma od trenutka nultog maksimuma i podijeli sa brojem ciklusa koji su prošli između njih.

$$P' = (T_n - T_0)/n \quad (6)$$

Greška perioda P' ovisi o točnosti s kojom se odrede trenuci maksimuma. Može se trenutak maksimuma T_n odrediti ranije ili kasnije od stvarnog trenutka tog maksimuma, isto tako i T_0 , pa period P' može ispasti kraci, odnosno dulji od stvarnog perioda P .

Slijedi provjera jesmo li dobro izračunali period i trenutke maksimuma. Uz pomoć perioda P' i trenutka prvog maksimuma izračunaju se tzv. „izračunati“ trenuci maksimuma za izabrane cikluse (A, B, C...), po slijedećoj formuli:

$$T'_n = T'_0 + P' * E_n. \quad (7)$$

Ovdje je T'_n n-ti trenutak maksimuma, T'_0 već određeni nulti trenutak maksimuma, P' period koji se dobije iz (6), a E_n takozvana epoha što je isto što i redni broj maksimuma (n). Na primjeru u tablici 9. ti su trenuci dani pod C. U koloni O-C dane su razlike „promatranog“ i „izračunatog“ trenutka maksimuma.

Tablica 9. Rezultati Pogsonove metode određivanja perioda za promatranja delte Cep Pickeringovom metodom

	O	n	C	O-C
A	401,3869	0	401,3869	0
B	433,4429	6	433,638	-0,1951
C	578,5833	33	578,7676	-0,1843
D	584,5783	34	584,1428	0,4355
E	600,3756	37	600,2683	0,1073
F	611,5335	39	611,0186	0,5149
G	616,3938	40	616,3938	0

$$P' = 5,3752$$

$$\Delta T = -0,1183$$

$$\Delta P = 0,008$$

$$T' = 401,2686$$

$$P'' = 5,3832$$

Oznace li se pravi trenuci maksimuma s M_n , jednadžba (7) za taj slučaj glasi:

$$M_n = M_0 + P * E_n \quad (8)$$

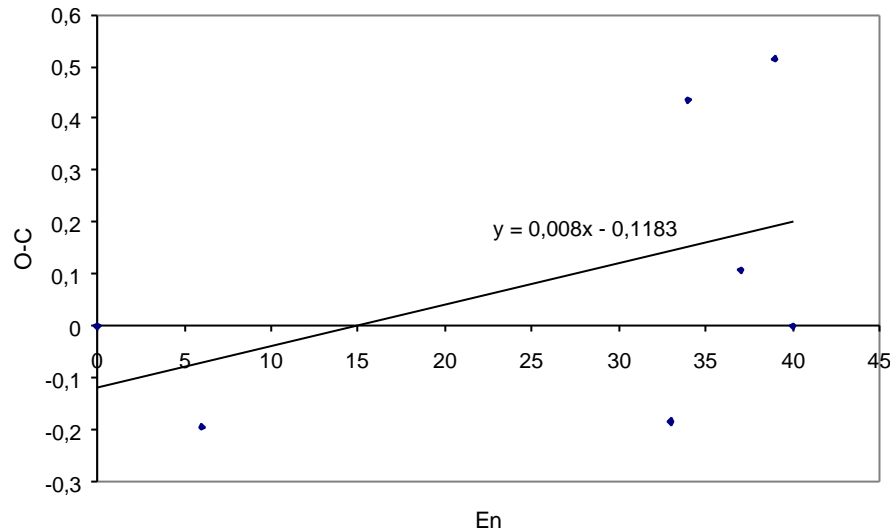
Oduzimanjem (8) od (7) dobiva se:

$$(M_n - T'_n) = (M_0 - T'_0) + (P' - P) * E_n.$$

Zapravo se dobiva n jednadžbi gdje se E_n zna točno, $(M_0 - T'_0) = \Delta T_0$ je popravka početnog maksimuma koja se traži, $(P' - P) = \Delta P$ je popravka perioda koja se traži, a za $(M_n - T'_n)$ se može uvrstiti O-C.

Ovdje se ponovo koristi metoda najmanjih kvadrata. Napravi se graf gdje je apscisa E_n , a ordinata O-C (sl 5). Da smo savršeno točno odredili trenutke maksimuma iz naših

mjerenja pa prema tome i period, točke bi sve ležale na pravcu $(O-C) = 0$. U slučaju da smo period odredili točno, ali da smo „promašili“ u određivanju trenutka početnog maksimuma T_0 , točke bi ležale na pravcu paralelnom s apscisom iznad ili ispod 0, ovisno o tome jesmo li T_0 odredili prije ili poslije pravog trenutka maksimuma M_0 . Ako smo period P odredili kracim (duljim) nego što je stvarni period točke bi trebale oblikovati nagnuti pravac s pozitivnim (negativnim) koeficijentom smjera.



Slika 5. Graf $En - (O-C)$ za promatrane maksimume delte Cep za Pickeringovu metodu

Metodom najmanjih kvadrata dobiva se popravka početnog trenutka maksimuma ΔT_0 (odsjecak na ordinati) i popravka perioda ΔP (koeficijent smjera pravca). Sada se izračunava korigirani period: $P'' = P + \Delta P$, te korigirani početni trenutak maksimuma: $T'' = T + \Delta T_0$.

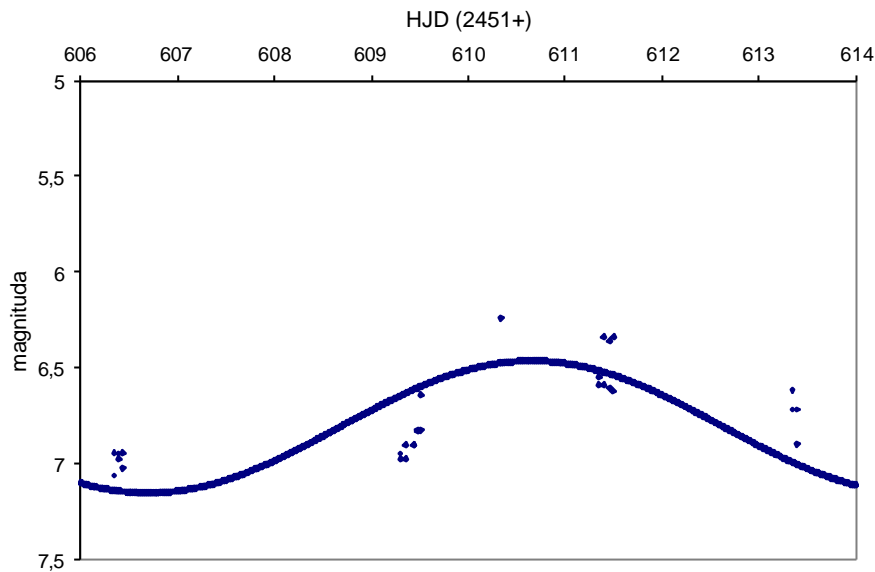
S tim novim elementima sada se mogu opet proračunati izračunati trenuci maksimuma te se istom procedurom još poboljšava period i T_0 .

2.6.4. ODREĐIVANJE PERIODA HERTZSPRUNGOVOM METODOM

Ovom se metodom period određuje nešto preciznije. U prethodnoj se metodi naprosto uzima točka najvećeg sjaja u ciklusu kao maksimum, a kod Hertzsprungove se koriste i ostala promatranja unutar jednog ciklusa pomoću kojih se određuje trenutak maksimuma.

Ovom se metodom obrađuju samo ciklusi sa više promatranja, gdje se trenutak maksimuma može dovoljno točno odrediti.

Imamo promatranja unutar jednog ciklusa promjenljive zvijezde. Na slici 6. vidimo točke koje predstavljaju promatranja izvršena unutar ciklusa za W Gem. Tih je tocaka premalo da bi se mogla povući krivulja promjene sjaja iz koje bi se odredio ekstrem. Zato se koristi krivulja sjaja promjenljive zvijezde koju dobivamo iz faznog dijagrama. Prema položaju tocaka, odnosno promatranja, određena je krivulja promjene sjaja.



Slika 6. Prikaz ciklusa za promatranja W Gem sa sinusoidom kao pripadajucom krivuljom sjaja

Odredena krivulja sjaja i promatranja unutar jednog ciklusa smještaju se u isti koordinatni sustav (slika 6.).

Imamo sliku koja prikazuje promatranja promjenljive zvijezde unutar jednog ciklusa, te sliku krivulje promjene sjaja. Pomicanjem krivulje sjaja uzduž osi apscisa traži se položaj u kojem se ona najbolje poklapa s promatranjima. Kada se odredi taj položaj, pošto je poznato gdje je maksimum krivulje sjaja, na osi apscisa ocita se trenutak maksimuma u HJD.

Krivulja se namjesti tako da se njen trenutak maksimuma nalazi nešto ulijevo od (prema promatranjima) predviđenog trenutka maksimuma. Da bi se vidjelo koliko se dobro krivulja poklapa s mjerenjima, izracuna se odstupanje svake tocke od krivulje. Potom se odstupanje svake tocke kvadrira i sve se zbroji. Tako dobivamo ukupnu kvadratnu pogrešku.

Kao rezultat traži se položaj krivulje gdje je odstupanje najmanje, pa zato krivulju za neki pomak pomicemo udesno, i za svaki pomak određujemo ukupno kvadratno odstupanje.

Ako se rezultati unesu u koordinatni sustav koji prikazuje ovisnost ukupnog kvadratnog odstupanja o položaju maksimuma krivulje sjaja, dobiva se parabola. Naime, ukupna se kvadratna pogreška na početku smanjuje a pri kraju povećava. Naravno, kada se krivulja približava svom najboljem položaju u odnosu na tocke, sve se bolje s njima poklapa, a što se od njega udaljuje povećava se i odstupanje. Valja odrediti najmanje odstupanje, odnosno ekstrem dobivene parabole.

Za određivanje ekstrema dobivene parabole možemo koristiti Pogsonovu metodu tetiva. Tako se dobiva trenutak maksimuma danog ciklusa promatranja.

Kada odredimo HJD maksimuma, daljnji je postupak identican metodi određivanja perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih motrenjima.

3. POGREŠKE VIZUALNIH PROMATRANJA

3.1. PURKINJEOV EFEKT

Neki fiziološki efekti ljudskog oka u znatnoj mjeri mogu utjecati na vizualna promatranja promjenljivih zvijezda.

Ovaj se efekt sastoji u tome što ljudsko oko ne reagira jednako na identičnu količinu svjetlosti koju prima od dva izvora koji se razlikuju po dijelu spektra u kojem imaju maksimum zračenja.

Pretpostavimo da imamo dvije svjetle točke identičnog sjaja od kojih je jedna crvena a druga plava. Crvena će nam točka izgledati sjajnije. Zatim istovremeno oslabljujemo oba izvora svjetlosti u istom omjeru. Vidjeli bi da njihov sjaj uskoro postaje jednak, a sa daljnjim oslabljivanjem svjetlosti uskoro bi nam plavi izvor počeo izgledati sjajnijim.

Utjecaj Purkinje-ovog efekta na promatranja promjenljivih zvijezda je takav, da će nam kod zvijezda sjajnijih od 3^m crvene izgledati sjajnije od plavih. Kod zvijezda slabijih sjajeva utjecaj je suprotan.

Zbog ovog se efekta trebaju birati poredbene koje su po boji bliske promjenljivoj zvijezdi, odnosno koje su bliskog spektralnog razreda.

3.2. POGREŠKA UZROKOVANA EKSTINKCIJOM

Neke su od pogrešaka sistematske, a najutjecajnija je pogreška koja se javlja zbog ekstinkcije.

Atmosferska je ekstinkcija apsorpcija svjetlosti nebeskih tijela u Zemljinj atmosferi. Velicina ekstinkcije ovisi o vajnoj duljini, zenitnoj udaljenosti objekta, stanju atmosfere i nadmorskoj visini mjesta promatranja.

Ovdje ćemo proučiti utjecaj ekstinkcije na sjaj zvijezda s obzirom na zenitnu udaljenost objekta. Što je objekt dalje od zenita to njegovo zračenje mora proći kroz deblji sloj atmosfere, pa je dulje izloženo utjecaju apsorpcije. Tako manje fotona dopiše do Zemljine površine, pa izgleda da je zvijezda slabijeg sjaja.

Dakle, s povećanjem zenitne udaljenosti zvijezde, njen nam sjaj izgleda sve slabiji – povećava se razlika magnitude pri zenitnoj udaljenosti x i pri zenitu $m_x - m_z = ?m$.

Tablica 10. prikazuje ovisnost promjene sjaja zvijezde ($?m$) o zenitnoj udaljenosti (x). Ovdje je pretpostavljeno da se $?m$ između slijedecih zenitnih udaljenosti povećava linearno: 10°-20°, 20°-30°, 30°-40°, 40°-50°, 50°-60°, 60°-70°, 70°-75°, 75°-80°, 80°-85°, 85-87°.

S povećanjem zenitne udaljenosti, atmosferska ekstinkcija počinje uočljivo ovisiti i o boji zvijezde. Ekstinkcija je različita za različite boje. Zbog toga na velikim zenitnim udaljenostima može doći do velikih pogrešaka ako su izabrane poredbene zvijezde vrlo različitih spektralnih razreda.

Tablica 10. Ovisnost promjene sjaja zvijezde o zenitnoj udaljenosti.

Zenitna udaljenost /°	? m	Zenitna udaljenost /°	? m	Zenitna udaljenost /°	? m	Zenitna udaljenost /°	? m
0	0,00	23	0,016	46	0,096	69	0,428
1	0,00	24	0,018	47	0,102	70	0,45
2	0,00	25	0,02	48	0,108	71	0,49
3	0,00	26	0,022	49	0,114	72	0,53
4	0,00	27	0,024	50	0,12	73	0,57
5	0,00	28	0,026	51	0,131	74	0,61
6	0,00	29	0,028	52	0,142	75	0,65
7	0,00	30	0,03	53	0,153	76	0,718
8	0,00	31	0,033	54	0,164	77	0,786
9	0,00	32	0,036	55	0,175	78	0,854
10	0,00	33	0,039	56	0,186	79	0,922
11	0,001	34	0,042	57	0,197	80	0,99
12	0,002	35	0,045	58	0,208	81	1,146
13	0,003	36	0,048	59	0,219	82	1,302
14	0,004	37	0,051	60	0,23	83	1,458
15	0,005	38	0,054	61	0,252	84	1,614
16	0,006	39	0,057	62	0,274	85	1,77
17	0,007	40	0,06	63	0,296	86	2,19
18	0,008	41	0,066	64	0,318	87	2,61
19	0,009	42	0,072	65	0,34		
20	0,01	43	0,078	66	0,362		
21	0,012	44	0,084	67	0,384		
22	0,014	45	0,09	68	0,406		

3.2.1. ODREĐIVANJE VISINE ZVIJEZDE

Buduci da za korekciju sjaja zbog ekstinkcije moramo poznavati zenitnu udaljenost (z) u trenutku promatranja, neophodno je odrediti visinu zvijezde (h) buduci da medu tim velicinama postoji veza:

$$h + z = 90^\circ.$$

Visina (h) i azimut (A) elementi su horizontskog koordinatnog sustava. Dakle, za trenutak našeg promatranja, moramo ekvatorske koordinate zvijezda, koje poznajemo, pretvoriti u horizontske.

Poznata je geografska širina mjesta promatranja f, te deklinacija d i satni kut zvijezde t. Kako je

$$t = s - a,$$

za $a < s$, odnosno

$$t = s + 360^\circ - a$$

za $s < a$, gdje je s zvjezdano vrijeme a a rektascenzija zvijezde, prvo treba odrediti zvjezdano vrijeme. Poznato je da je

1 srednji suncevi dan = 1,00273790935 srednjih zvjezdanih dana,

pa ćemo to iskoristiti. Odredimo jedan trenutak koji se koristi kao početni. Zatim se odredi koliko je prošlo srednjih suncevih dana od tog trenutka do trenutka promatranja, te se iz gornje jednakosti odredi koliko je prošlo srednjih zvjezdanih dana. Dobivena vrijednost pribroji se iznosu zvjezdanog vremena početnog trenutka. Dobivena se vrijednost umanjuje za jedan zvjezdani dan sve dok zvjezdano vrijeme ne izlazi manje od 1 odnosno manje od 24 zvjezdanih sati. Tako se dobiva zvjezdano vrijeme trenutka promatranja.

Kad se odredi zvjezdano vrijeme određen je i t, s time što se zvjezdano vrijeme mora pretvoriti u stupnjeve ako je i a u stupnjevima.

Iz sfernih trokuta dobije se:

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin f * \sin d + \cos f * \cos d * \cos t \\ \sin z * \sin A &= \sin t * \cos d \\ - \sin z * \cos A &= \cos f * \sin d - \sin f * \cos d * \cos t \end{aligned} \quad (9)$$

da bi se pojednostavnili ovi izrazi uvode se izrazi n i N , koji su jednaki:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} N &= \operatorname{tg} d / \cos t \\ n &= \cos d * \cos t / \cos N. \end{aligned}$$

Njihovim uvođenjem u jednačbe (9) dobije se:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A &= (\operatorname{tg} t * \cos N) / (\sin(f - N)) \\ \operatorname{tg} z &= (\operatorname{tg}(f - N)) / \cos A \end{aligned}$$

Pomoćni se kut N uzima od 0° do 90° , s predznakom (+) ili (-), što ovisi o predznaku velicine $\operatorname{tg} N$.

Ako je $t < 180^\circ$ onda je $A < 180^\circ$, a ako je $t > 180^\circ$ tada je $A > 180^\circ$. To ovisi o predznaku velicine $\operatorname{tg} A$.

A zenitna je daljina uvijek $0^\circ < z < 180^\circ$, što ovisi o predznaku velicine $\operatorname{tg} z$.

U slučaju kada je $t = \pm 90^\circ$ imamo pravokutan sferni trokut iz kojeg se dobiva:

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin f * \sin d \\ \cos A &= -(\cos f * \sin d) / \sin z. \end{aligned}$$

3.2.2. KOREKCIJA SJAJA DOBIVENOG PICKERINGOVOM METODOM ZBOG UTJECAJA EKSTINKCIJE

Zbog utjecaja ekstinkcije mi u stvari vidimo sjajeve promjenljive i poredbenih zvijezda kao $m_v + ? m_v$, $a + ? m_a$ i $b + ? m_b$, gdje su m_v , a i b sjajevi zvijezda koje one imaju u zenitu, a delte su popravke iz tablice 10. Stoga, kad uračunamo atmosfersku ekstinkciju izraz za sjaj promjenljive zvijezde dobiven Pickeringovom metodom izgleda ovako:

$$m_v + \Delta m_v = (a + \Delta m_a) + p * [(b + \Delta m_b) - (a + \Delta m_a)] / 10$$

a iz toga se dobije

$$m_v = a + p * (b - a) / 10 + \Delta m_a - \Delta m_v + [p * (\Delta m_b - \Delta m_a) / 10].$$

3.2.3. KOREKCIJA SJAJA DOBIVENOG ARGELANDEROVOM METODOM ZBOG UTJECAJA EKSTINKCIJE

U Argelanderovoj metodi ocjena ima oblik $a \ q \ v, \ v \ p \ b$. Pri određivanju sjaja promjenljive zvijezde moramo ukloniti utjecaj ekstinkcije.

Prvo se određuju sjajevi promjenljive i poredbenih zvijezda koje one imaju zbog utjecaja ekstinkcije. Pomocu tablice 10. dobiva se $a' = a + \Delta m_a, b' = b + \Delta m_b, m_v + \Delta m_v$. Kod promatranja mi određujemo razliku u stupnjevima između b' i a' odnosno $\Delta m'$, dok za određivanje sjaja promjenljive zvijezde trebamo stupanjsku razliku između b i a odnosno Δm . Dakle, ocjenili smo da $\Delta m'$ iznosi $q + p$ stupnjeva, da bismo odredili koliko nam stupnjeva iznosi Δm poslužiti ćemo se jednostavnom proporcionalnošću.

Dakle:

$$\Delta m / x = \Delta m' / (q + p),$$

odnosno:

$$(b - a) / x = (b + \Delta m_b - a - \Delta m_a) / (q + p),$$

iz čega se dobiva:

$$x = (b - a) * (q + p) / (b + \Delta m_b - a - \Delta m_a).$$

Tako se dolazi do razlike Δm u jedinicama stupnja (x), koja se koristi u postupku određivanja sjaja promjenljive zvijezde Argelanderovom metodom, pri čemu jednačba (3) poprima oblik:

$$m_v = a_2 + p * (b_2 - a_2) / (p + q) - \Delta m_v.$$

4. REZULTATI OBRADJE PROMATRANJA

U ovom poglavlju prikazani su rezultati vlastitih promatranja, od prikaza izvršenih promatranja do rezultata dobivenih navedenim metodama, te njihovo obrazloženje.

Ovdje se ujedno nalaze potvrde nekih prije navedenih tvrdnji.

Promjenljive zvijezde čiji su podaci promatranja ovdje obrađeni odabrane su po tome što im je amplituda oko 0,5 m, što je dovoljno da primjeti i relativno neiskusni promatrač, i što su vidljive golim okom ili pomoću dvogleda promjera objektiva 50 mm, što je dostupna oprema.

Promatrane su slijedeće promjenljive zvijezde: delta Cefeja, W Blizanaca, zeta Blizanaca, RT Kocijaša i beta Perzeja. U tablici 1. nalaze se njihovi osnovni podaci.

4.1. REZULTATI PROMATRANJA VIZUALNIH METODA

Tablica 11. Prikaz izvršenih promatranja promjenljivih zvijezda

promjenljiva zvijezda	metoda promatranja		S	instrument
	Argelanderova	Pickeringova		
RT Aur	74	75	149	dvogled (promjer objektiva 50mm)
delta Cep	101	128	229	dvogled (promjer objektiva 50mm)
zeta Gem	62	71	133	oko
W Gem	72	75	147	dvogled (promjer objektiva 50mm)
beta Per	-	122	122	oko
S	309	471	780	

U tablici 11. vidi se broj promatranja izvršenih pojedinom vizualnom metodom promatranja, kao i instrument kojim su promatrane. Sva su promatranja izvršena od 01. 08. 1999. do 01. 04. 2000. Četiri su zvijezde promatrane sa obje metode, a beta Per samo Pickeringovom metodom. Uočljivo je najviše promatranja izvršeno za deltu Cep.

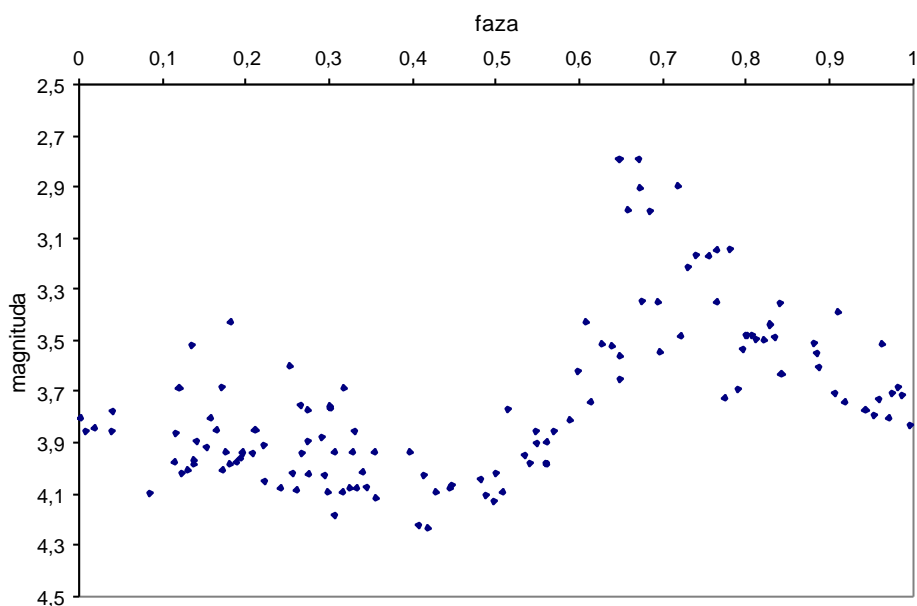
Faza zvijezde prema jednadžbi (4) izračunata je za proizvoljno određeni trenutak t_0 . Odabrani trenuci promatranja t_0 za svaku promatranu zvijezdu, nalaze se u tablici 12.

Tablica 12. Prikaz odabranih trenutaka t_0 za promatrane promjenljive zvijezde

zvijezda	t_0 (HJD)
RT Aur	2 451 541,5543
delta Cep	2 451 392,4014
zeta Gem	2 451 513,2742
W Gem	2 451 519,3715
beta Per	2 451 399,4590

4.1.1. REZULTATI PROMATranJA PICKERINGOVOM METODOM

Na slici 7. nalaze se rezultati promatranja delte Cep Pickeringovom metodom.



Slika 7. Fazni dijagram za promatranja delte Cep Pickeringovom metodom

Ako promotrimo sliku 7. vidimo da se narocito veliko rasipanje tocaka pojavljuje oko samog maksimuma sjaja. Taj slucaj nije samo kod delte Cep vec i kod W Gem i RT Aur. Kod svih triju zvijezda to je najvjerojatnije uzrokom cinjenice da nam je promjenljiva zvijezda pri maksimalnom sjaju bila sjajnija od obje poredbene zvijezde ili je razlika u sjaju izmedu dviju poredbenih bila poprilično velika.

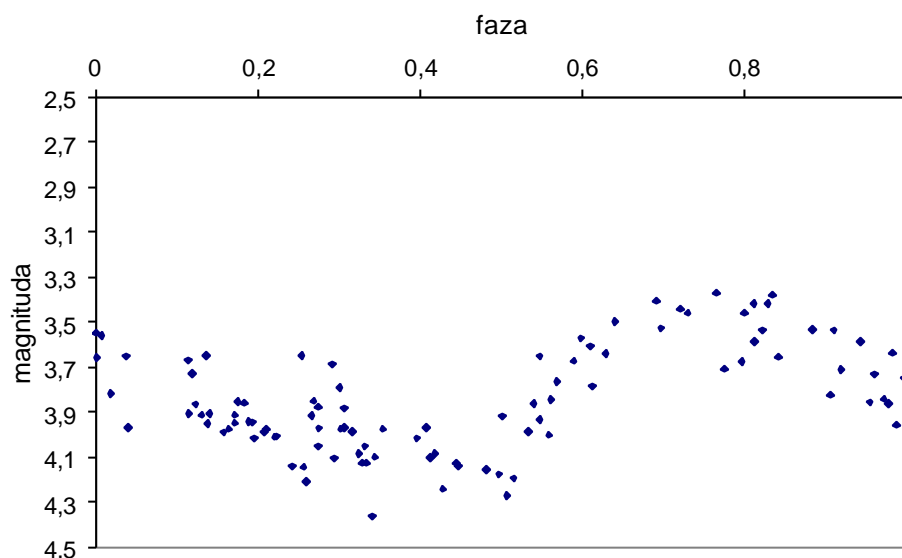
Beta Per je pomrcinski promjenljiva zvijezda koja veci dio perioda sjaj uocljivo ne mijenja. Sjaj se uocljivo mijenja samo tijekom primarnog minimuma. Zato je vecina promatranja vršena upravo u to vrijeme, pa su ona koncentrirana u djelu faznog dijagrama od 0,8 do 1 faze. Slika 4. pokazuje upravo taj dio faznog dijagrama. Na njoj je sam minimum lako uocljiv.

Ako općenito pogledamo raspored tocaka u svim faznim dijagramima, vidimo da su poprilično rasipane, što je dijelom i za ocekivati jer su promatranja vršena vizualno.

4.1.2. REZULTATI PROMATRANJA ARGELANDEROVOM METODOM

Na slici 8. prikazani su rezultati promatranja delte Cep Argelanderovom metodom.

Kod svih zvijezda koje su promatrane sa obje metode, uocava se da je manje raspršenje tocaka upravo kod Argelanderove metode. Kod delte Cep je to pogotovo izraženo kod područja oko maksimuma, a kod RT Aur, zete Gem i W Gem, raspršenje je uocljivo manje tijekom cijelog perioda.



Slika 8. Fazni dijagram za promatranja delte Cep Argelanderovom metodom

Ocekivalo se da ce raspšenje tocaka biti manje kod Pickeringove metode jer kod nje je vec u pocetku postojalo iskustvo u promatranjima. Ipak, kod Argelanderove se metode dobiva izražajnije krivulja sjaja.

4.1.3. PRIKAZ PROMJENE VRIJEDNOSTI STUPNJA

Izrazita promjena vrijednosti stupnja najbolje se uocava kod promatranja delte Cep na slici 9., a može se vidjeti i kod promatranja W Gem na slici 10. Naime, te su se dvije zvijezde najprije počele promatrati Argelanderovom metodom. Kako prije tih promatranja nije postojalo nikakvo iskustvo u promatranju Argelanderovom metodom, kod njih se može vidjeti promjenljivost vrijednosti stupnja, odnosno njegovo smanjivanje. Stupanj se naime tada nakon nekog vremena stabilizira i više se ne mijenja, pa se zato promjena ne uocava na promatranjima ostalih zvijezda.

Kroz tocke na oba grafa, metodom najmanjeg kvadrata odredimo jednadžbe pravaca koji najbolje prolaze kroz njih. Jednadžba pravca grafa 9. glasi:

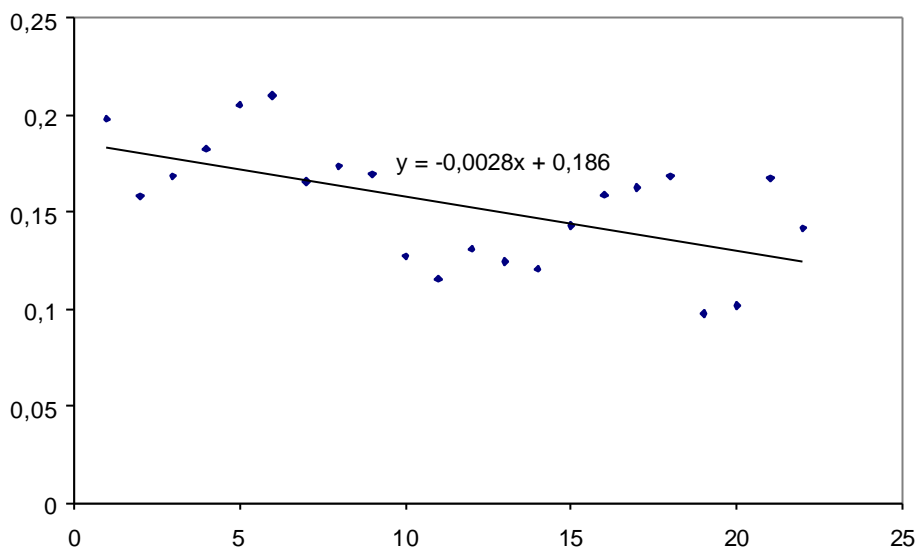
$$y = -0,0028x + 0,186,$$

a grafa 10.:

$$y = -0,0012x + 0,104.$$

Uocavamo da oba pravca imaju negativan koeficijent smjera. Kako je na osi apscisa funkcija vremena, a na osi ordinata nalazi se vrijednost stupnja, zakljucujemo da se vrijednost stupnja s vremenom smanjuje.

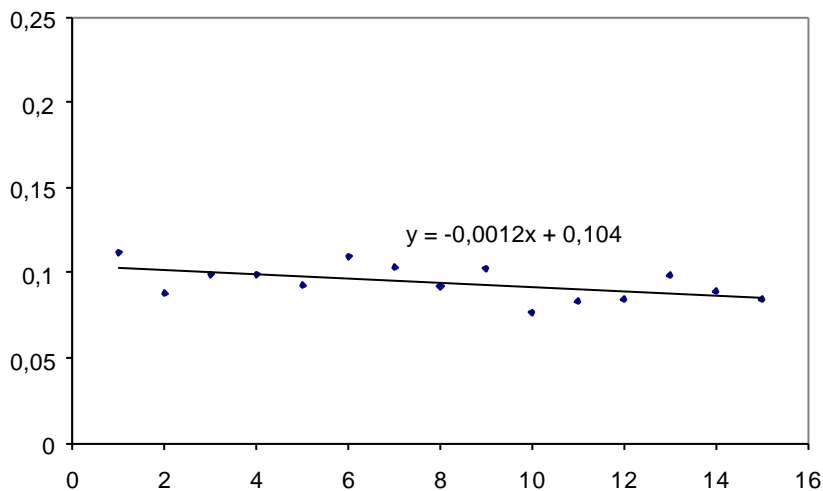
Vidimo da je vrijednost stupnja pri pocetku grafu 9. veca. To se može objasniti cinjenicom da su se promatranja ciji se rezultati nalaze u grafu 9. prije pocela provoditi. Naime, vrijednost je stupnja u pocetku veca.



Slika 9. Promjena vrijednosti stupnja za promatranja delte Cep

Kako je koeficijent smjera pravca na grafu 9. negativniji od onog na grafu 10. zakljucujemo da se vrijednost stupnja na grafu 9. za više smanjila. Objašnjenje takoder leži u cinjenici da se s promatranjima na grafu 9. prije pocelo. Naime, vrijednost se stupnja na pocetku smanjuje brže, a potom sve sporije.

Za odredivanje vrijednosti stupnja uzete su grupe od po 10 uzastopnih promatranja jedne zvijezde, s pomakom od 5 promatranja. Dakle promatranja 1-10, 5-15, 10-20,...

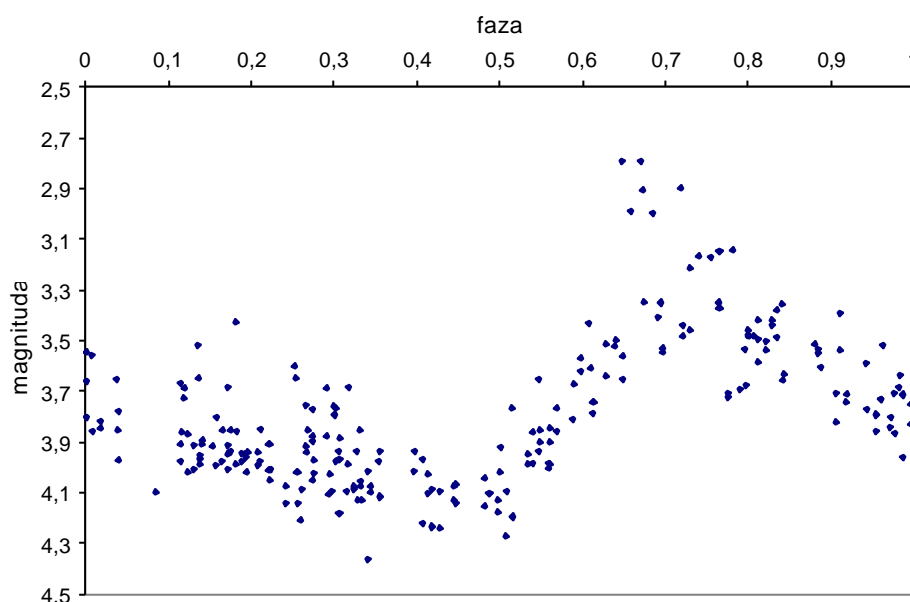


Slika 10. Promjena vrijednosti stupnja za promatranja W Gem

4.1.4. REZULTATI PROMATranJA PICKERINGOVOM I ARGELANDEROVOM METODOM PRIKAZANI ZAJEDNO

Promatranja izvršena sa dvije različite vizualne metode možemo prikazati i u jednom koordinatnom sustavu, odnosno zajedno. Rezultati za promatranja delte Cep vide se na slici 11.

Zajedničkim uvrštavanjem u jedan koordinatni sustav dobivamo veću zastupljenost tocaka. Upravo je to vrlo bitno za neke metode obrade podataka koje zahtijevaju više promatranja.



Slika 11. Fazni dijagram za promatranja delte Cep Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno

4.2. REZULTATI ODREĐIVANJA EKSTREMA POGSONOVOM METODOM TETIVA

Kod određivanja trenutaka ekstrema za promjenljive zvijezde cefeide određujemo maksimum, a za pomrcinske promjenljive zvijezde trenutak minimuma. Tako trenutak minimuma od promatranih promjenljivih zvijezda određujemo samo kod bete Per.

Ova se metoda može koristiti i na faznim i na magnituda-HJD dijagramima. Ovdje je vršena samo na faznim zbog promalog broja promatranja unutar jednog ciklusa.

Metoda je vršena na promatranjima za svaku metodu vizualnog promatranja posebno, i zajedno.

Dobivene faze ekstrema nalaze se u tablici 13. U drugoj se koloni nalazi faza ekstrema dobivena iz promatranja Pickeringovom metodom, u trećoj faza ekstrema dobivena iz

promatranja Argelanderovom metodom, a u četvrtoj fazi ekstrema dobivena iz promatranja Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno.

Tablica 13. Rezultati Pogsonove metode određivanja ekstrema

zvijezda	faza ekstrema (Pickeringova metoda)	faza ekstrema (Argelanderova metoda)	faza ekstrema (obje metode zajedno)	predviđena faza maksimuma
delta Cep	0,7000	0,7292	0,7333	0,7355
RT Aur	0,6750	0,6542	0,6792	0,7227
zeta Gem	0,6208	0,6375	0,6542	0,7101
beta Per	0,8742	-	-	0,8700
W Gem	0,4917	0,5167	0,5083	0,8300

Tablica 14. Odstupanja rezultata dobivenih Pogsonovom metodom tetiva i predviđene faze ekstrema (? f)

zvijezda	(?f) kod Pickeringove metode	(?f) kod Argelanderove metode	(?f) kod Pickeringove i Argelanderove metode zajedno
delta Cep	-0,0355	-0,0063	0,0022
RT Aur	-0,0477	-0,0685	-0,0435
zeta Gem	-0,0893	-0,0726	-0,0559
beta Per	0,0042	-	-
W Gem	-0,3383	-0,3133	-0,3217

U tablici 13. predviđene su faze ekstrema dobive iz podataka u tablici 12. U tablici 14. nalaze se razlike između faze ekstrema dobivene Pogsonovom metodom tetiva i predviđene faze ekstrema.

U tablici 14. vidimo da uvjerljivo najbolji rezultat dobivamo za betu Per, što je i bilo za očekivati jer kod nje imamo najviše tocaka oko ekstrema.

Kod W Gem uočavamo preveliko odstupanje da bismo ga mogli pripisati samo eventualnim pogreškama ove metode.

Kod delte Cep i zete Gem rezultat je bolji kod Argelanderove metode. Uzrok je tome spomenuta grupa tocaka kod Pickeringove metode koja znatno odstupa od većine, a nalazi se oko područja ekstrema. Kao i kod RT Aur najbolji se rezultati postižu za promatranja obje metode zajedno, jer tu imamo i najviše tocaka.

4.3. REZULTATI ODREĐIVANJA EKSTREMA POLINOMOM TREĆEG STUPNJA

Ova je metoda također korištena pri obradi za svaku vizualnu metodu promatranja posebno, i zajedno.

Pomocu faza ekstrema dobivenih Pogsonovom metodom tetiva određena su područja kroz koja se određuje jednadžba kubne funkcije. Područja se nalaze u tablici 15. Područja su određivana s obzirom na koncentraciju tocaka oko ekstrema, i na izgled krivulje sjaja.

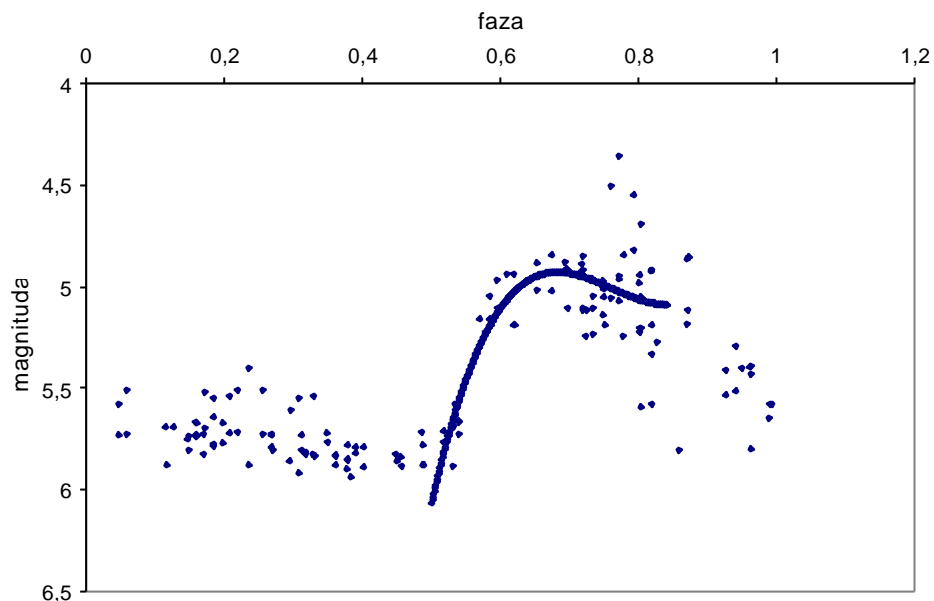
Tablica 15. Područja na faznom dijagramu kroz koja su određivane jednadžbe kubne funkcije

zvijezda	Pickeringova metoda	Argelanderova metoda	Argelanderova i Pickeringova metoda zajedno
delta Cep	0,55 – 0,90	0,55 – 0,91	0,55 – 0,95
W Gem	0,35 – 0,65	0,35 – 0,65	0,38 – 0,7
RT Aur	0,55 – 0,908	0,54 – 0,77	0,5 – 0,8416
zeta Gem	0,50 – 0,82	0,5 – 0,866	0,5 – 0,8
beta Per	0,84 – 0,92	-	-

Tablica 16. Jednadžbe kubnih funkcija kroz područja u tablici 15. za određenu vizualnu metodu promatranja

zvijezda	metoda vizualnog promatranja	jednadžba funkcije
delta Cep	Pickering	$f(x) = -114,5194 x^3 + 269,4548 x^2 - 208,4062x + 56,3417$
	Argelander	$f(x) = -16,1927 x^3 + 46,5955 x^2 - 42,1937x + 15,7242$
	Pickering i Argelander zajedno	$f(x) = -74,31x^3 + 180,0401x^2 - 142,8594x + 40,5551$
RT Aur	Pickering	$f(x) = 34,0876 x^3 - 61,4253 x^2 + 35,0358x - 1,1268$
	Argelander	$f(x) = -229,1994 x^3 + 484,0193 x^2 - 338,4693x + 83,3043$
	Pickering i Argelander zajedno	$f(x) = -82,2137 x^3 + 187,6471 x^2 - 141,2389x + 40,0524$
zeta Gem	Pickering	$f(x) = -51,7366 x^3 + 112,5089 x^2 - 80,6392x + 22,568$
	Argelander	$f(x) = 11,0771 x^3 - 13,8897 x^2 + 3,512x + 4,0994$
	Pickering i Argelander zajedno	$f(x) = -52,1204 x^3 + 110,6076 x^2 - 77,6045 x + 21,5394$
beta Per	Pickering	$f(x) = 3562,5923 x^3 - 9920,7081 x^2 + 9182,3424x - 2822,5641$
W Gem	Pickering	$f(x) = -19,3749 x^3 + 65,9440 x^2 - 52,6675x + 18,3194$
	Argelander	$f(x) = -21,2247 x^3 + 48,7763 x^2 - 33,5266x + 13,6616$
	Pickering i Argelander zajedno	$f(x) = -134,0609 x^3 + 237,1333 x^2 - 136,1706x + 31,7598$

U tablici 16. nalaze se jednadžbe kubnih funkcija određene za područja u tablici 15. Na slici 12. vidimo rezultat ove metode za RT Aur.



Slika 12. Kubna funkcija kroz područje oko ekstrema za RT Aur. Motrenja Pickeringovom i Argelanderovom metodom prikazana su zajedno

Tablica 17. Trenuci ekstrema dobiveni polinomom trećeg stupnja

zvijezda	metoda vizualnog promatranja	faza ekstrema	razlika dobivene faze ekstrema i predviđene	srednje kvadratno odstupanje	broj točaka u području određivanja kubne funkcije
delta Cep	Pickering	0,692	-0,0435	0,0412	43
	Argelander	0,7323	-0,0032	0,0108	25
	Pickering i Argelander zajedno	0,7008	-0,0347	0,0339	75
RT Aur	Pickering	0,7355	0,0128	0,0793	30
	Argelander	0,6468	-0,0759	0,0051	21
	Pickering i Argelander zajedno	0,6822	-0,0405	0,0394	65
zeta Gem	Pickering	0,648	-0,0621	0,0217	25
	Argelander	0,6807	-0,0294	0,0160	26
	Pickering i Argelander zajedno	0,6435	-0,0666	0,0203	46
beta Per	Pickering	0,8786	0,0086	0,066	63
W Gem	Pickering	0,5172	-0,3128	0,0844	31
	Argelander	0,5205	-0,3095	0,0046	29
	Pickering i Argelander zajedno	0,4944	-0,3356	0,0571	64

Određivanjem ekstrema dobivenih funkcija dobivamo i traženi trenutak ekstrema na krivulji sjaja. Rezultati se nalaze u tablici 17. U njoj su predviđeni trenuci ekstrema isti kao i kod tablice 13.

Ovdje necemo raspravljati o rezultatima W Gem, jer smo kod Pogsonove metode tetiva utvrdili da rezultati previše odstupaju od onih u katalogu, da bi se greške mogle pripisati samo metodi obrade.

Kod delte Cep, opet dobivamo bolji rezultat na promatranjima Argelanderovom metodom, a i vidimo da nam je srednje kvadratno odstupanje kod nje mnogo manje, za što je zaslužno manje rasipanje tocaka.

Kod RT Aur bolje rješenje dobivamo za Pickeringovu metodu, naprosto zbog više tocaka koje se nalaze u podrucju određivanja funkcije.

Beta Per i ovom metodom daje vrlo dobar rezultat zbog velike koncentracije tocaka u podrucju određivanja jednadžbe funkcije.

4.4. USPOREDBA REZULTATA POGSONOVE METODE TETIVA I METODE ODREĐIVANJA EKSTREMA POLINOMOM TRECEG STUPNJA

Tablica 18. Usporedba rezultata Pogsonove metode tetiva i metode određivanja ekstrema polinomom treceg stupnja. Za promatranja Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno

zvijezda	Pogsonova metoda	Razlika Pogsona i predviđenog	Metoda polinoma	Razlika metode polinoma i predviđenog	Srednje kvadratno odstupanje
delta Cep	0,7333	-0,0022	0,7008	-0,0347	0,0339
RT Aur	0,6792	-0,0435	0,6822	-0,0405	0,0394
zeta Gem	0,6542	-0,0559	0,6435	-0,0666	0,0203
beta Per	0,8742	0,0042	0,8786	0,0086	0,0660
W Gem	0,5083	-0,3217	0,4944	-0,3356	0,0571

Iz tablice 18. uocava se da za vecinu promatranih zvijezda Pogsonova metoda tetiva daje rezultate koji su bliži rezultatima iz kataloga. Ovaj je rezultat neocekivan, jer je metoda određivanja polinoma preciznija. Ipak, rezultat se objašnjava time, što je srednje kvadratno odstupanje kod metode određivanja polinoma poprilično veliko, pa je za ocekivati da cemo dobiti manje tocan rezultat.

4.5. REZULTATI ODREĐIVANJA PERIODA IZ TRENUTAKA EKSTREMA DOBIVENIH PROMATRANJIMA

Kod ove je metode vrlo bitno da imamo što više promatranja unutar jednog ciklusa promjene sjaja. Tako je metoda korištena za obradu podataka promatranja Pickeringovom i

Argelanderovom metode zajedno. Dovoljno promatranja imamo jedino kod delte Cep, pa je za nju metoda korištena za obje vizualne metode promatranja posebno.

Druga korekcija perioda i pocetnog trenutka maksimuma mjerljiva je samo kod delte Cep, pa je samo za nju i radena.

Tablica 19. prikazuje rezultate odredivanja perioda za promatranja delte Cep Pickeringovom metodom, a tablica 21. Argelanderovom metodom. Tablica 22. prikazuje rezultate za promatranja Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno.

Tablica 19. Rezultati odredivanja perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima za deltu Cep Pickeringovom metodom

	O	n	C	O-C
A	401,3869	0	401,3869	0
B	433,4429	6	433,638	-0,1951
C	578,5833	33	578,7676	-0,1843
D	584,5783	34	584,1428	0,4355
E	600,3756	37	600,2683	0,1073
F	611,5335	39	611,0186	0,5149
G	616,3938	40	616,3938	0

$$P^{\wedge} = 5,3752$$

$$?T = -0,1183$$

$$?P = 0,008$$

$$T^{\wedge} = 401,2686$$

$$P^{\wedge} = 5,3832$$

Tablica 20. Rezultati odredivanja perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima za deltu Cep Pickeringovom metodom (druga korekcija)

	O	n	C	O-C
A	401,3869	0	401,2686	0,1183
B	433,4429	6	433,5678	-0,1249
C	578,5833	33	578,9142	-0,3309
D	584,5783	34	584,2974	0,2809
E	600,3756	37	600,4470	-0,0714
F	611,5335	39	611,2134	0,3201
G	616,3938	34	616,5966	-0,2028

$$?T^{\wedge} = 0,0001$$

$$?P^{\wedge} = -0,0001$$

$$T^{\wedge} = 401,2687$$

$$P^{\wedge} = 5,3831$$

Tablica 21. Rezultati odredivanja perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima za deltu Cep Argelanderovom metodom

	O	n	C	O-C	C [^]	O-C [^]
A	396,3832	0	396,3832	0	396,3317	0,0515
B	519,2641	23	519,8822	-0,6181	519,8231	-0,559
C	547,4016	28	546,7318	0,6698	546,6691	0,7325
D	578,5661	34	578,9493	-0,3832	578,8842	-0,3181

E	584,5803	35	548,3189	0,2614	584,2534	0,3269
F	589,3288	36	589,6885	-0,3597	589,6226	-0,2938
G	600,4277	38	600,4277	0	600,361	0,0667

$$P^{\wedge} = 5,3696$$

$$?T_0 = -0,0515$$

$$?P = -0,0004$$

$$?T_0^{\wedge} = -0,0004$$

$$?P = 0$$

$$P - P^{\wedge\wedge} = 0,0029$$

$$T^{\wedge\wedge} = 396,3317$$

$$P^{\wedge\wedge} = 5,36919$$

$$T^{\wedge\wedge\wedge} = 396,3313$$

$$P^{\wedge\wedge\wedge} = 5,3692$$

Tablica 22. Rezultati određivanja perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima za deltu Cep za Pickeringovu i Argelanderovu metodu zajedno

	O	n	C	O-C	C [^]	O-C [^]
A	396,3832	0	396,3832	0	396,1831	0,2001
B	406,3955	2	407,1224	-0,726884	406,9327	-0,5372
C	423,5287	5	423,2312	0,29754	423,0571	0,4716
D	428,4552	6	428,6008	-0,145552	428,4318	0,0234
E	433,4429	7	433,9703	-0,527444	433,8066	-0,3637
F	460,3973	12	460,8183	-0,421004	460,6806	-0,2833
G	466,3536	13	466,1879	0,165704	466,0554	0,2982
H	520,3405	23	519,8838	0,456684	519,8033	0,5372
I	578,5833	34	578,9493	-0,366028	578,926	-0,3427
J	600,4277	38	600,4277	0	600,4252	0,0025

$$P^{\wedge} = 5,3696 \text{ dana}$$

$$?T_0 = -0,2001 \text{ dana}$$

$$?P = 0,0052$$

$$?T_0^{\wedge} = 0 \text{ dana}$$

$$?P = 0$$

$$P - P^{\wedge\wedge} = 0,0085$$

$$T^{\wedge\wedge} = 396,1831$$

$$P^{\wedge\wedge} = 5,3748$$

$$T^{\wedge\wedge\wedge} = 396,1831$$

$$P^{\wedge\wedge\wedge} = 5,3748$$

Tablica 23. Usporedba rezultata određivanja perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima za različite metode promatranja delte Cep

	Pickering	razlika dobivenog i predviđenog (Pickering)	Argelander	razlika dobivenog i predviđenog (Argelander)	Pickering + Argelander	razlika dobivenog i predviđenog (Pickering + Argelander)
P [^]	5,3752	0,0089	5,3696	0,0033	5,3696	0,0033
P ^{^^}	5,3832	0,0169	5,3692	0,0029	5,3748	0,0085
P ^{^^^}	5,3831	0,0168	5,3692	0,0029	5,3748	0,0085

Iz tablice 23. vidimo da se najtocniji rezultati za deltu Cep dobivaju ako se uzmu samo promatranja vršena Argelanderovom metodom. Kod njih se dobiva najmanje odstupanje od

perioda iz kataloga. Objašnjenje pronalazimo u manjoj raštrkanosti tocaka kod promatranja Argelanderovom metodom.

Tablica 24. Rezultati određivanja perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima za RT Aur Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno

	O	n	C	O-C
A	578,358	0	578,358	0
B	581,346	1	582,0443	-0,6983
C	585,5214	2	585,7305	-0,2091
D	603,5116	7	604,1619	-0,6503
E	611,5344	9	611,5344	0

$$P^{\wedge} = 3,6863$$

$$?T = -0,3267$$

$$?P = 0,004$$

$$T^{\wedge} = 578,0313$$

$$P^{\wedge} = 3,6903$$

Tablica 25. Rezultati određivanja perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima za zetu Gem Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno

	O	n	C	O-C
A	570,3651	0	570,3651	0
B	581,5118	1	580,6072	0,9046
C	600,4648	3	601,0913	-0,6265
D	611,3333	4	611,3333	0

$$P^{\wedge} = 10,2421$$

$$?T = 0,3757$$

$$?P = -0,1531$$

$$T^{\wedge} = 570,7408$$

$$P^{\wedge} = 10,0889$$

Tablica 26. Rezultati određivanja perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima za betu Per Pickeringovom metodom

	O	n	C	O-C
A	433,5013	0	433,5013	0
B	522,364	31	522,4129	-0,0489
C	542,4575	38	542,4897	-0,0322
D	548,2383	40	548,2259	0,0124
E	585,4956	53	585,5114	-0,0158
F	611,3244	62	611,3244	0

$$P^{\wedge} = 2,8681$$

$$?T = -0,0153$$

$$?P = 0$$

$$T^{\wedge} = 433,486$$

$$P^{\wedge} = 2,8681$$

Tablica 27. Rezultati određivanja perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima za W Gem Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno

	O	n	C	O-C
A	571,3578	0	571,3578	0
B	579,3900	1	579,1541	0,2359
C	602,4313	4	602,5432	-0,1119
D	610,3395	5	610,3395	0

$$P^{\wedge} = 7,7963$$

$$?T = 0,1077$$

$$?P = -0,0307$$

$$T^{\wedge} = 571,4655$$

$$P^{\wedge} = 7,7656$$

Tablica 28. Rezultati određivanja perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima za sve promjenljive zvijezde Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno (osim bete Per, gdje je promatrano samo Pickeringovom metodom)

zvijezda	P^{\wedge}	dobiveni P-stvarni	T^{\wedge}
delta Cep	(P^{\wedge}) 5,3831	0,0168	(T^{\wedge}) 401,2687
RT Aur	3,6903	-0,0378	578,0313
zeta Gem	10,0889	-0,0618	570,7408
beta Per	2,8681	0,0008	433,486
W Gem	7,7656	-0,1485	571,4655

Iz tablice 28. vidimo da nam se dobivani rezultati vrlo dobro poklapaju sa poznatim podacima. Izuzetak je jedino W Gem.

Kod bete Per dobivamo najbolji rezultat, što je i bilo za očekivati. Kod nje imamo u ciklusima mnogo promatranja upravo oko minimuma sjaja, i lako je procijeniti koje nam promatranje predstavlja minimum.

4.6. SINUSOIDE KAO KRIVULJE SJAJA

Hartzsprungova se metoda može napraviti na racunalu, ako nam je poznata jednadžba krivulje sjaja. Tako je ovdje kao krivulja sjaja korištena sinusoida koja najbolje prijanja promatranjima.

Za određivanje sinusoide, potrebno je što više promatranja, pa su u tu svrhu uzeta promatranja izvršena Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno za svaku promatranu promjenljivu zvijezdu. Dobivene jednadžbe sinusoida nalaze se u tablici 29.

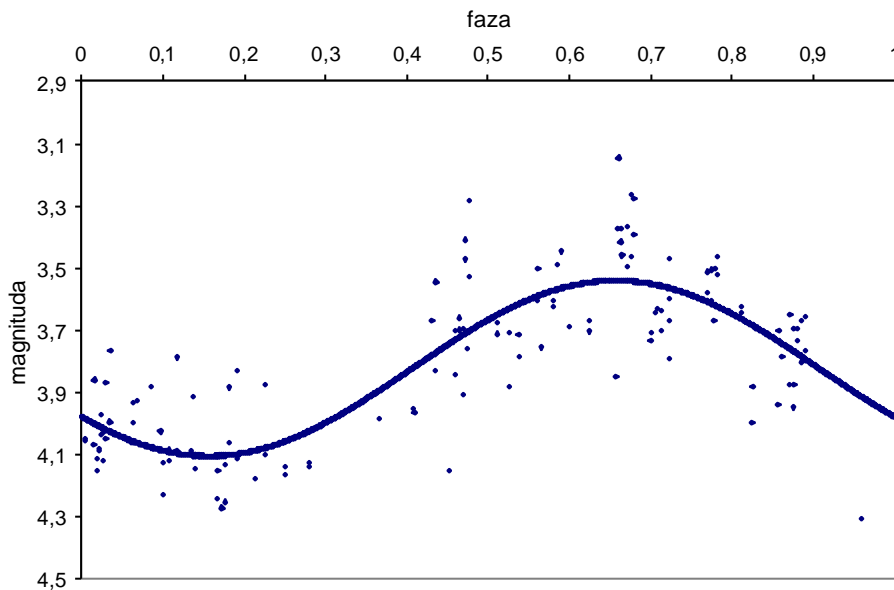
Tablica 29. Sinusoide kao krivulje sjaja promatranih promjenljivih zvijezda

zvijezda	jednadžba sinusoide	faza ekstrema
W Gem	$f(f) = 6,8111 + 0,2936\cos(f) + 0,1819\sin(f)$	0,5880
RT Aur	$f(f) = 5,4484 - 0,0494\cos(f) + 0,3992\sin(f)$	0,7703

delta Cep	$f(f) = 3,7552 - 0,0950\cos(f) + 0,2696\sin(f)$	0,8037
zeta Gem	$f(f) = 3,8232 + 0,1560\cos(f) + 0,2354\sin(f)$	0,6573
beta Per	$f(f) = 1,8773 - 0,1355\cos(f) + 1,1458\sin(f)$	0,8807

Kao što vidimo sa slike 4., beta Per ima većinu svog perioda konstantan sjaj. Stoga bi promatranja jako odstupala od sinusoide da je određujemo za cijeli period. Zato uzimamo samo područje gdje joj se sjaj mijenja, i gdje ga lako možemo usporediti sa sinusoidom. Tako uzimamo područje 0,8 – 1,1 faze. Jednadžba za dato porucje nalazi se u tablici 29.

Na slici 13. vidimo primjer za zetu Gem.



Slika 13. Sinusoida kao krivulja sjaja za promatranja zete Gem. Motrenja Pickeringovom i Argelanderovom metodom prikazana su zajedno

4.7. REZULTATI ODREĐIVANJA PERIODA HERTZSPRUNGOVOM METODOM

Odstupanja promatranja W Gem od krivulje kod ciklusa prikazanog na slici 6. nalaze se u tablici 30. Početni položaj maksimuma krivulje je za 0,15 faze udaljen od trenutka maksimuma (određenog određivanjem polinoma trećeg stupnja) a pomak iznosi 0,015 faze. Krivulja se pomice 20 puta.

Ako podatke iz tablice 30. unesemo u koordinatni sustav, dobivamo sliku 14..

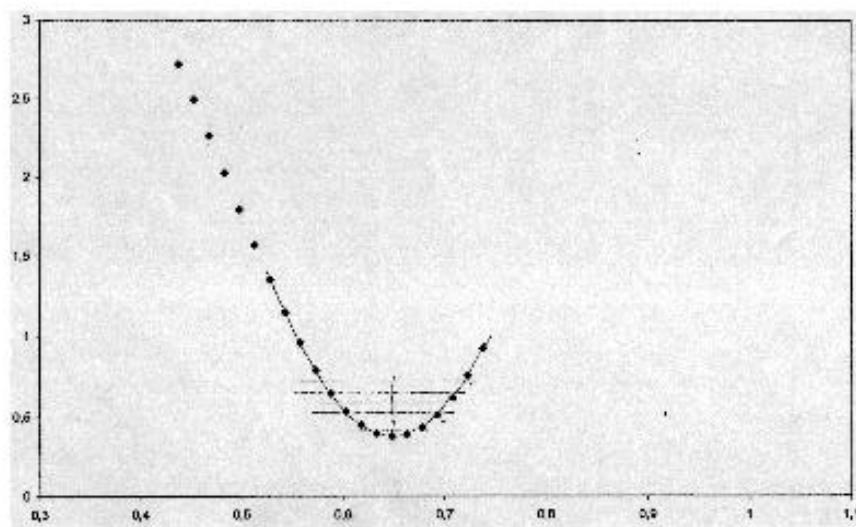
Ekstrem parabole na slici 14. dobiven je Pogsonovom metodom tetiva, i nalazi se na 0,65 faze, što je faza maksimuma danih promatranja na slici 6.

Jednakim su postupkom dobivene faze maksimuma ostalih ciklusa W Gem te ostalih promatranih promjenljivih zvijezda. Iz dobivene se faze određuje trenutak ekstrema u HJD.

Rezultati Hertzsprungove metode određivanja perioda nalaze se u tablicama 31.-36. .

Tablica 30. Mjenjanje ukupne kvadratne udaljenosti pomicanjem krivulje za 0,015 faze 20 puta.

Ukupni kvadratni pomak	Faza maksimuma
2,7233	0,438
2,495	0,453
2,2617	0,468
2,0269	0,483
1,794	0,498
1,5668	0,513
1,3491	0,528
1,1449	0,543
0,958	0,558
0,7919	0,573
0,6499	0,588
0,5351	0,603
0,4497	0,618
0,3958	0,633
0,3745	0,648
0,3867	0,663
0,4322	0,678
0,5105	0,693
0,6201	0,708
0,7591	0,723
0,925	0,738



Slika 14. Promjena ukupne kvadratne pogreške pomicanjem krivulje sjaja, za podatke na slici 6.

Tablica 31. Rezultati Hertzprungove metode odredivanja perioda za promatranja delte Cep Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno

	O	n	C	O-C
A	573,8865	0	573,8865	0
B	578,716	1	579,2404	-0,5244
C	584,102	2	584,5943	-0,4923
D	600,3758	5	600,656	-0,2802
E	611,8021	7	611,3638	0,4383
F	616,7177	8	616,7177	0

$$P^{\wedge} = 5,3539$$

$$?T = -0,3842$$

$$?P = 0,0629$$

$$T^{\wedge\wedge} = 573,5023$$

$$P^{\wedge\wedge} = 5,4168$$

Tablica 32. Rezultati Hertzprungove metode odredivanja perioda za promatranja delte Cep Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno (druga korekcija)

	O	n	C	O-C
A	573,8865	0	573,5023	0,3842
B	578,7160	1	578,9191	0,2031
C	584,1020	2	584,3359	-0,2339
D	600,3758	5	600,5863	-0,2105
E	611,8021	7	611,4199	0,3822
F	616,7177	8	616,8367	-0,1190

$$?T^{\wedge} = 0,1481$$

$$?P^{\wedge} = -0,0210$$

$$T^{\wedge\wedge\wedge} = 573,6504$$

$$P^{\wedge\wedge\wedge} = 5,3958$$

Tablica 33. Rezultati Hertzprungove metode odredivanja perioda za promatranja RT Aur Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno

	O	n	C	O-C
A	581,3164	0	0	0
B	585,7728	1	585,1169	0,6559
C	611,7203	8	0	0

$$P^{\wedge} = 3,8005$$

$$?T = 0,3222$$

$$?P = -0,0345$$

$$T^{\wedge\wedge} = 581,6386$$

$$P^{\wedge\wedge} = 3,766$$

Tablica 34. Rezultati Hertzsprungove metode odredivanja perioda za promatranja zete Gem Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno

	O	n	C	O-C
A	580,6491	0	580,6491	0
B	601,4288	2	600,9134	0,5154
C	611,0456	3	611,0456	0

$P^{\wedge} = 10,1322$ dana

$?T = 0,1104$ HJD

$?P = 0,0368$ dana

$T^{\wedge} = 580,7595$ HJD

$P^{\wedge} = 10,169$ dana

Tablica 35. Rezultati Hertzsprungove metode odredivanja perioda za promatranja bete Per Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno

	O	n	C	O-C
A	433,4551	0	433,4551	0
B	522,3917	31	522,3724	0,0193
C	548,2408	40	548,1871	0,0537
D	585,5034	53	585,475	0,0284
E	611,2897	62	611,2897	0

$P^{\wedge} = 2,8683$ dana

$?T = 0,0125$ HJD

$?P = 0,0002$ dana

$T^{\wedge} = 433,4676$ HJD

$P^{\wedge} = 2,8685$ dana

Tablica 36. Rezultati Hertzsprungove metode odredivanja perioda za promatranja W Gem Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno

	O	n	C	O-C
A	547,4136	0	547,4136	0
B	571,4464	3	571,4727	-0,0263
C	579,4137	4	579,4924	-0,0787
D	587,3052	5	587,5120	-0,2068
F	611,5711	8	611,5711	0

$P^{\wedge} = 8,0197$ dana

$?T = -0,0411$ HJD

$?P = -0,0053$ dana

$T^{\wedge} = 547,3725$ HJD

$P^{\wedge} = 8,0144$ dana

Tablica 37. Rezultati Hertzsprungove metode odredivanja perioda za promatranja Pickeringovom i Argelanderovom metodom zajedno

zvijezda	P^{\wedge}	($?f$)	T^{\wedge}
delta Cep	(P^{\wedge}) 5,3958	0,0295	(T^{\wedge}) 573,6504
RT Aur	3,7660	0,0379	581,6386
zeta Gem	10,1690	0,0183	580,7595

beta Per	2,8685	0,0012	433,4676
W Gem	8,0144	0,1003	547,3725

U tablici 37. Δf predstavlja razliku između perioda dobivenog Hertzsprungovom metodom i stvarnog perioda iz kataloga.

Iz tablice 37. vidi se da smo sve periode osim za W Gem dobili sa malim odstupanjem. Razlog tome je vjerojatno u dosta velikoj raštrkanosti tocaka oko maksimuma sjaja u faznom dijagramu.

Najbolje smo odredili period za betu Per. Razlog je isti kao i kod metode određivanja perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima: velika koncentracija promatranja oko ekstrema (minimuma) u ciklusu.

4.8. USPOREDBA REZULTATA DOBIVENIH METODOM ODREĐIVANJA PERIODA IZ TRENUTAKA EKSTREMA DOBIVENIH PROMATRANJIMA I HERTZSPRUNGOVOM METODOM

Tablica 38. Usporedba rezultata dobivenih određivanjem perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima i Hertzsprungovom metodom određivanja perioda

zvijezda	određivanje perioda iz..	(Δf)	Hertzsprung ova metoda	(Δf)
delta Cep	5,3831	0,0168	5,3958	0,0295
RT Aur	3,6903	-0,0378	3,7660	0,0379
zeta Gem	10,0889	-0,0618	10,1690	0,0183
beta Per	2,8681	0,0008	2,8685	0,0012
W Gem	7,7656	-0,1485	8,0144	0,1003

U tablici 38. nalaze se rezultati dobiveni određivanjem perioda iz trenutaka ekstrema dobivenih promatranjima i Hertzsprungovom metodom određivanja perioda.

Vidimo da bolji rezultat Hertzsprungovom metodom dobivamo samo u slučaju zete Gem i W Gem. Uzrok tome je najbolje poklapanje rezultata promatranjima sa sinusoidom od obradenih promjenljivih zvijezda.

Hertzsprungova je metoda preciznija. Ovdje nam rezultati ispadaju drugacije zbog toga što smo za krivulju sjaja uzeli sinusoidu, koja se u potpunosti ne poklapa sa promatranjima, odnosno sa stvarnom krivuljom sjaja.

5. ZAKLJUCCI

Obradujući svoja ovdje predstavljena promatranja, došla sam do nekih zaključaka koji mi pomažu pri budućim promatranjima promjenljivih zvijezda.

- I. Uočila sam da bolje rezultate dobivam kada promatram Argelanderovom metodom. Odnosno, meni kao promatraču bolje odbovara ta metoda. Ovo ne mora značiti da ćete i vi njome dobivati bolje rezultate.
- II. Vrijednost se stupnja s iskustvom smanjuje, a nakon nekog vremena se stabilizira, i više se bitno ne mijenja.
- III. Svakako je bitno imati što više promatranja. Time dobivamo i bolje rezultate. To se lijepo vidi na primjeru delte Cep.
- IV. Potrebno je što više promatranja oko samog ekstrema. To se vidi na primjeru bete Per, za koju je taj uvjet ispunjen i dobiju se bolji rezultati nego kod drugih zvijezda.
- V. Paziti pri izboru krivulje kojom zamjenjujemo stvarnu krivulju sjaja pri Hertzsprungovoj metodi. Uočila sam da je sinusoida zadovoljavajuća samo kod 2 od ukupno 5 promatranih promjenljivih zvijezda.

6. MATEMATICKI DODATAK

U ovom ćemo se poglavlju upoznati sa nekim matematičkim metodama koje su nam neophodne u metodama obrade koje ćemo kasnije koristiti.

6.1. METODA NAJMANJIH KVADRATA

Metodom najmanjeg kvadrata rješavamo probleme ovog tipa:
Dat je niz empiričkih tocaka:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n).$$

U našem je slučaju x_i faza, a y_i magnituda promjenljive zvijezde.

Ako se te točke povežu, dobije se općenito izlomljena linija. Ovu krivulju treba „izgladiti“. Problem se dakle sastoji u tome da se ta izlomljena linija zamjeni glatkom krivuljom.

Problem se rješava na slijedeći način.

Najprije treba izabrati tip krivulje koji će se najbolje prilagoditi datim empiričkim točkama. Jednadžba (krivulje) može biti linearna, kvadratna, kubna, eksponencijalna ili neka druga funkcija. Ovdje ćemo proučiti linearnu i kubnu funkciju.

6.1.1. METODA NAJMANJIH KVADRATA ZA LINEARNU FUNKCIJU

Ako je odabrana linearna funkcija, treba odrediti 2 parametra (koeficijent smjera i odsjecak na osi y).

Opcenito za krivulju koja najbolje prijanja uz mjerenja treba vrijediti da je suma kvadrata odstupanja tocaka krivulje od empiričkih tocaka minimalna. Odnosno:

$$S (Y_i - y_i)^2 = \text{minimum}, \quad (10)$$

gdje je y_i ordinata i -te empiričke točke a Y_i ordinata i -te točke na krivulji. Ovdje i u daljnjim izrazima sumiramo od 1 do n .

Tražimo pravac $Y = ax + b$ koji najbolje odgovara empiričkim točkama. Tada imamo:

$$S (Y_i - y_i)^2 = S (ax_i + b - y_i)^2 = \text{minimum} \quad (11)$$

Sada tražimo minimum funkcije (11). Razmotrimo točku koja je minimum neke funkcije. Tangenta u toj točki paralelna je sa osi x , pa je i njen koeficijent smjera jednak nuli. Kako je on jednak parcijalnoj derivaciji po svakoj varijabli, imamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} S (ax_i + b - y_i)^2 &= 2 * S (ax_i + b - y_i)(x_i) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} S (ax_i + b - y_i)^2 &= 2 * S (ax_i + b - y_i) = 0 \end{aligned}$$

Iz cega dobivamo:

$$\begin{aligned} - \sum y_i \cdot x_i + a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i &= 0 \\ - \sum y_i + a \cdot \sum x_i + b \cdot n &= 0. \end{aligned}$$

Sada imamo sustav dviju jednačbi s dvije nepoznanice. Rješenje sustava su slijedeći izrazi:

$$\begin{aligned} a &= (\sum y_i \cdot x_i - \sum x_i \cdot \sum y_i) / (\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2) \quad (12) \\ b &= (\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot y_i \cdot \sum x_i) / (\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2) \quad (13) \end{aligned}$$

Sada kad smo odredili koeficijent smjera i odsjecak na osi y, možemo napisati jednačbu traženog pravca:

$$y = (\sum y_i \cdot x_i - \sum x_i \cdot \sum y_i) / (\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2) \cdot x + (\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot y_i \cdot \sum x_i) / (\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2).$$

6.1.2. METODA NAJMANJIM KVADRATA ZA KUBNU FUNKCIJU

Sada određujemo jednačbu kubne funkcije $Y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, koja najbolje prijanja uz naša promatranja. Kao i kod pravca vrijedi izraz (10) iz kojeg uvrštavanjem dobivamo:

$$\sum (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i)^2 = \text{minimum.}$$

Ovdje i u daljnjim izrazima sumiramo od 1 do n.

Iz parcijalnog deriviranja dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} (\sum (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i)^2) &= 2 \cdot \sum (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i)(x_i^3) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} (\sum (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i)^2) &= 2 \cdot \sum (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i)(x_i^2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial c} (\sum (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i)^2) &= 2 \cdot \sum (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i)(x_i) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial d} (\sum (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i)^2) &= 2 \cdot \sum (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i) = 0 \end{aligned}$$

Iz cega izlazi:

$$a \sum x_i^6 + b \sum x_i^5 + c \sum x_i^4 + d \sum x_i^3 - \sum x_i^3 y_i = 0 \quad (14)$$

$$a \sum x_i^5 + b \sum x_i^4 + c \sum x_i^3 + d \sum x_i^2 - \sum x_i^2 y_i = 0 \quad (15)$$

$$a \sum x_i^4 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^2 + d \sum x_i - \sum x_i y_i = 0 \quad (16)$$

$$a \sum x_i^3 + b \sum x_i^2 + c \sum x_i + d \cdot n - \sum y_i = 0. \quad (17)$$

Ovaj cemo sustav jednačbi riješiti Gaussovom metodom.

Iz (14) izrazimo a:

$$a = \sum x_i^3 y_i / \sum x_i^6 - d \sum x_i^3 / \sum x_i^6 - c \sum x_i^4 / \sum x_i^6 - b \sum x_i^5 / \sum x_i^6. \quad (18)$$

Sada za (18) definiramo slijedeće konstante:

$$k_1 = \sum x_i^3 y_i / \sum x_i^6$$

$$\begin{aligned}k_2 &= Sx^3/Sx^6 \\k_3 &= Sx^4/Sx^6 \\k_4 &= Sx^5/Sx^6.\end{aligned}$$

Njihovim uvrštavanjem u (18) dobivamo:

$$a = k_1 - dk_2 - ck_3 - bk_4 \quad (19).$$

Sada smo a izrazili preko b, c i d te sad imamo samo 3 nepoznanice.

Uvrštavanjem (19) u (15) dobivamo:

$$b = \frac{(k_1 - dk_2 - ck_3 - bk_4) Sx^5 + bSx^4 + cSx^3 + dSx^2 - Sx^2y}{(k_1Sx^5 - Sx^2y)/(Sx^4 - k_4Sx^5) + d(Sx^2 - k_2Sx^5)/(Sx^4 - k_4Sx^5) + c(Sx^3 - k_2Sx^5)/(Sx^4 - k_4Sx^5)} = 0 \quad (20)$$

Za (20) cemo takoder uvesti slijedece konstante:

$$\begin{aligned}k_5 &= (k_1Sx^5 - Sx^2y)/(Sx^4 - k_4Sx^5) \\k_6 &= (Sx^2 - k_2Sx^5)/(Sx^4 - k_4Sx^5) \\k_7 &= (Sx^3 - k_2Sx^5)/(Sx^4 - k_4Sx^5),\end{aligned}$$

cijim uvrštavanjem dobivamo:

$$b = k_5 + dk_6 + ck_7. \quad (21)$$

sada smo b izrazili preko c i d. Isto možemo uciniti i sa a, uvrštavanjem (21) u (19) dobivamo:

$$a = k_1 - k_5k_4 - d(k_6k_4 + k_2) - c(k_7k_4 + k_3).$$

Uvrštavanjem slijedecih konstanti:

$$\begin{aligned}k_8 &= k_1 - k_5k_4 \\k_9 &= k_6k_4 + k_2 \\k_{10} &= k_7k_4 + k_3\end{aligned}$$

imamo:

$$a = k_8 - dk_9 - ck_{10}. \quad (22)$$

Ovime smo broj nepoznanica sveli na dva. Daljnjim postupkom dobivamo samo 1 nepoznanicu.

Uvrštavanjem (21) i (22) u (16) dobivamo:

$$c = \frac{(Sxy - k_8Sx^4 - k_5Sx^3)/(Sx^2 + k_7Sx^3 - k_{10}Sx^4) + d(k_9Sx^4 - k_6Sx^3 - Sx^2)/(Sx^2 + k_7Sx^3 - k_{10}Sx^4)}{k_{10}Sx^4}.$$

Uvođenjem konstanti k_{11} i k_{12} :

$$\begin{aligned}k_{11} &= (Sxy - k_8Sx^4 - k_5Sx^3)/(Sx^2 + k_7Sx^3 - k_{10}Sx^4) \\k_{12} &= (k_9Sx^4 - k_6Sx^3 - Sx^2)/(Sx^2 + k_7Sx^3 - k_{10}Sx^4),\end{aligned}$$

imamo:

$$c = k_{11} + dk_{12}. \quad (23)$$

Sada i nepoznanice a i b izražavamo preko d. Uvrštavanjem (23) u (21) i (22) dobivamo:

$$b = k_5 + k_{11}k_7 + d(k_6 + k_7k_{12}),$$

odnosno:

$$a = k_8 - k_{10}k_{11} - d(k_{10}k_{12} + k_9). \quad (24)$$

Ponovnim uvođenjem novih konstanti:

$$\begin{aligned} k_{13} &= k_5 + k_{11}k_7 \\ k_{14} &= k_6 + k_7k_{12} \\ k_{15} &= k_8 - k_{10}k_{11} \\ k_{16} &= k_{10}k_{12} + k_9, \end{aligned}$$

dobivamo:

$$b = k_{13} + dk_{14} \quad (25)$$

$$a = k_{15} - dk_{16}. \quad (26)$$

U jednadžbama (23),(24),(25) i (26) imamo sve ostale nepoznanice izražene preko d, odnosno imamo samo jednu nepoznanicu. Uvođenjem spomenutih izraza u (17) dobivamo nepoznanicu d:

$$d = (Sy - k_{15}Sx^3 - k_{11}Sx^2 - k_{11}Sx)/(k_{14}Sx^2 + k_{12}Sx - k_{16}Sx^3 + n). \quad (27)$$

Pošto smo dobili d, iz jednadžbi (23),(24),(25) i (26) dobivamo i ostale nepoznanice.

6.2. ODREĐIVANJE SINUSOIDE KAO KRIVULJE SJAJA

U Hertzsprungovoj metodi s kojom ćemo se kasnije upoznati, koristimo krivulju sjaja promjenljive zvijezde. Ovdje moramo mjerimo odstupanje svake točke od krivulje. Međutim, ako je jednadžba krivulje poznata, cijelu metodu možemo izvesti na računalo.

Ovdje ćemo krivulju sjaja zamjeniti sinusoidom i odrediti ćemo njenu jednadžbu. Naime, pretpostavljamo da se sinusoida dovoljno poklapa s mjerenjima, da bismo je koristili za određivanje trenutka maksimuma u Hertzsprungovoj metodi određivanja perioda.

Na faznom dijagramu promjenljive zvijezde imamo parove f_i i m_i . Za jednadžbu krivulje koristit ćemo Fourierov red sa 3 nepoznanice:

$$f(f_i) = a_0/2 + a_1 \cos(f_i) + b_1 \sin(f_i).$$

Zamjenit ćemo $a_0/2$ sa a_0 jer nam je jednostavnije raditi sa 1 nego sa $1/2$. Tako sada imamo:

$$f(f_i) = a_0 + a_1 \cdot \cos(f_i) + b_1 \cdot \sin(f_i). \quad (28)$$

Kao kod metode najmanjeg kvadrata odstupanje promatranja od krivulje mora biti najmanje moguće:

$$S(m_i - f(f_i))^2 = \min$$

$$S(m_i - a_0 - a_1 \cos(f_i) - b_1 \sin(f_i))^2 = \min$$

Kod minimuma su parcijalne derivacije po varijablama jednake nuli, pa imamo:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{\partial}{\partial a_0} S(m_i - a_0 - a_1 \cos(f_i) - b_1 \sin(f_i))^2 = \\ & = 2 \cdot (m_i - a_0 - a_1 \cos(f_i) - b_1 \sin(f_i)) \cdot (-1) = 0 \\ & - S \cdot m_i + S \cdot a_0 + a_1 S \cos(f_i) + b_1 S \sin(f_i) = 0 \\ & - S \cdot m_i + N \cdot a_0 + a_1 S \cos(f_i) + b_1 S \sin(f_i) = 0 \\ & N a_0 + (S \cos(f_i)) \cdot a_1 + (S \sin(f_i)) \cdot b_1 = S \cdot m_i \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad & \frac{\partial}{\partial a_1} S(m_i - a_0 - a_1 \cos(f_i) - b_1 \sin(f_i))^2 = \\ & = 2 \cdot (m_i - a_0 - a_1 \cos(f_i) - b_1 \sin(f_i)) \cdot (-\cos(f_i)) = 0 \\ & - S \cdot m_i \cdot \cos(f_i) + a_0 S \cos(f_i) + a_1 S \cos^2(f_i) + b_1 S \sin(f_i) \cos(f_i) = 0 \\ & (S \cos(f_i)) \cdot a_0 + (S \cos^2(f_i)) \cdot a_1 + (S \sin(f_i) \cos(f_i)) \cdot b_1 = S \cdot m_i \cdot \cos(f_i) \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III.} \quad & \frac{\partial}{\partial b_1} S(m_i - a_0 - a_1 \cos(f_i) - b_1 \sin(f_i))^2 = \\ & = 2 \cdot (m_i - a_0 - a_1 \cos(f_i) - b_1 \sin(f_i)) \cdot (-\sin(f_i)) = 0 \\ & - S \cdot m_i \cdot \sin(f_i) + a_0 S \sin(f_i) + a_1 S \cos(f_i) \sin(f_i) + b_1 S \sin^2(f_i) = 0 \\ & (S \sin(f_i)) \cdot a_0 + (S \cos(f_i) \sin(f_i)) \cdot a_1 + (S \sin^2(f_i)) \cdot b_1 = S \cdot m_i \cdot \sin(f_i) \quad (31) \end{aligned}$$

Da u daljnjem racunanju ne bismo koristili ove dugacke izraze uvest cemo slijedece konstante:

$$\begin{aligned} a_{11} &= N \\ a_{12} &= S \cos(f_i) \\ a_{13} &= S \sin(f_i) \\ a_{21} &= S \cos(f_i) \\ a_{22} &= S \cos^2(f_i) \\ a_{23} &= S \sin(f_i) \cos(f_i) \\ a_{31} &= S \sin(f_i) \\ a_{32} &= S \cos(f_i) \sin(f_i) \\ a_{33} &= S \sin^2(f_i) \\ x_1 &= a_0 \\ x_2 &= a_1 \\ x_3 &= b_1 \\ b_1' &= S \cdot m_i \\ b_2' &= S \cdot m_i \cdot \cos(f_i) \\ b_3' &= S \cdot m_i \cdot \sin(f_i). \end{aligned}$$

Sada jednadžbe (29), (30) i (31) poprimaju slijedece oblike:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1' \quad (32)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad (33)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \quad (34)$$

Ovaj cemo sustav 3 jednačbe s 3 nepoznanice rješiti Gaussovom metodom postupnom eliminacijom koja je korištena i kod metode najmanjeg kvadrata za kubicnu funkciju.

Prvo (32) podjelimo sa a_{11} :

$$x_1 + (a_{12}/a_{11})x_2 + (a_{13}/a_{11})x_3 = b_1/a_{11}, \quad (35)$$

i zatim pomnožimo sa a_{21} :

$$a_{21}x_1 + a_{21}(a_{12}/a_{11})x_2 + a_{21}(a_{13}/a_{11})x_3 = a_{21}b_1/a_{11}, \quad (36)$$

oduzmemo (36) od (33) i dobivamo:

$$(a_{22} - a_{12}a_{21}/a_{11})x_2 + (a_{23} - a_{13}a_{21}/a_{11})x_3 = b_2 - b_1a_{21}/a_{11} \quad (37)$$

U (37) uvodimo slijedece nepoznanice:

$$a_{22}' = a_{22} - a_{12}a_{21}/a_{11}$$

$$a_{23}' = a_{23} - a_{13}a_{21}/a_{11}$$

$$b_{21}' = b_2 - b_1a_{21}/a_{11}$$

te imamo:

$$a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 = b_{21}'. \quad (38)$$

Isto tako (35) pomnožimo sa a_{31} :

$$a_{31}x_1 + a_{31}(a_{12}/a_{11})x_2 + a_{31}(a_{13}/a_{11})x_3 = a_{31}b_1/a_{11},$$

te dobivenu jednačbu oduzmemo od (34):

$$(a_{32} - a_{31}a_{12}/a_{11})x_2 + (a_{33} - a_{31}a_{13}/a_{11})x_3 = b_3 - b_1a_{31}/a_{11}$$

Uvodimo slijedece nepoznanice:

$$a_{32}' = a_{32} - a_{31}a_{12}/a_{11}$$

$$a_{33}' = a_{33} - a_{31}a_{13}/a_{11}$$

$$b_{31} = b_3 - b_1a_{31}/a_{11}$$

te dobivamo:

$$a_{32}'x_2 + a_{33}'x_3 = b_{31} \quad (39)$$

Sada imamo sustav dvije jednačbe sa dvije nepoznanice (38) i (39):

$$a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 = b_{21}'$$

$$a_{32}'x_2 + a_{33}'x_3 = b_{31}$$

Sada (38) podijelimo sa a_{22} , pomnožimo a a_{32} , i to oduzmemo od (39), pa dobivamo:

$$(a_{33} - a_{23}a_{32}/a_{22})x_3 = b_{31} - b_{21}a_{32}/a_{22}, \quad (40)$$

uvodimo :

$$a_{33}'' = a_{33} - a_{23}a_{32}/a_{22}$$

pa imamo jednadžbu:

$$a_{33}''x_3 = b_{32} \quad (41)$$

Iz (41) dobivamo x_3 odnosno b_1 , a iz toga onda pomocu navedenih jednadžbi dobivamo i_0 i a_1 .

Ovim su postupkom dobivene sinusoide za svaku promatranu promjenljivu zvijezdu, koje se najbolje poklapaju s našim promatranjima.

Ovdje moramo imati na umu da je funkcija (28) periodicka s periodom od $2p$. Kako se funkcija određuje za fazni dijagram, tada nam je 1 period zapravo $2p$.

7. LITERATURA

1. Bolid, Mali astronomski godišnjak za 2000. Godinu, Zvezdarnica Zagreb- Zagrebacki astronomski savez
2. Glasby, Variable stars, Constable London
3. Martić, Matematicke metode za ekonomske analize, Narodne novine, Zagreb, 1990.
8. Metode promatranja i proučavanja, skupina autora, Narodna tehnika Hrvatske, Zagreb, 1982.
9. Pauše, Uvod u matematičku statistiku, Školska knjiga, Zagreb 1993
10. Roney and McCallum, Finding epheid maxima by means of least-squares cubic, Journal of the Royal Astronomical Society of Canada, Vol. 77, No. 5, October 1983.
7. Roša, Opća astronomija 2, Zvezdarnica hrvatskoga prirodoslovnog društva, Zagreb, 1993.
8. The AAVSO Variable star Atlas, second edition Prepared by Charles E. Scovil
9. Vujnović, Astronomija 2, Školska knjiga, Zagreb 1994.
10. Internet adrese:

 www.aavso.org
 www.nasa.gov

8. ZAHVALA

Zahvaljujem dr.sc. Hrvoju Božiću na pomoci pri ostvarenju ovog rada.

9. ŽIVOTOPIS

Rodena sam 02.06.1982. godine u Cakovcu. Sada sam završila sam 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije u Cakovcu. Astronomijom se bavim od drugog razreda srednje škole.

Prije astronomije bavila sam se matematikom (i fizikom) i redovito sudjelovala na državnim natjecanjima gdje sam postizala vrlo dobre rezultate. Prošle sam 1999. godine sudjelovala na državnom natjecanju iz astronomije i osvojila 1. mjesto. To mi je ujedno bio i poticaj za daljnji rad. Ove 2000. godine također sam osvojila 1. mjesto.

Prijašnje sam ljetne škole iz matematike, 1999. zamjenila onima iz astronomije. Tako sam sudjelovala u radu xxx. Astronomske ljetne škole Prvic Luka, te na Višnjanskoj školi astronomije 1999. Ondje sam puno naučila i dobro se zabavila.

Izvan tih okvira, hobi mi je fotografiranje.